

# 2021 年秋 《离散数学》 图论测试

姓名: \_\_\_\_\_

学号: \_\_\_\_\_

成绩: \_\_\_\_\_

一. 不定项选择题: 本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。 每小题有多个选项符合题意, 全部选对的得 4 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错或不答的得 0 分。

1. 下列关于图的基本概念的说法中, 正确的有 \_\_\_\_\_。

- A. 一个包含 5 个节点的图中, 节点的度数可能是 (3,4,2,2,4)。
- B. 已知图  $G = (V, E)$ , 图  $G' = (V', E')$ 。 如果  $G'$  是  $G$  的支撑子图, 那么  $V = V'$ 。
- C. 无向图  $G$  和  $G'$  如图 1 所示,  $G'$  是  $G$  的导出子图。
- D. 如果  $G$  和  $G'$  不存在同构的导出子图, 则  $G$  和  $G'$  一定不同构。

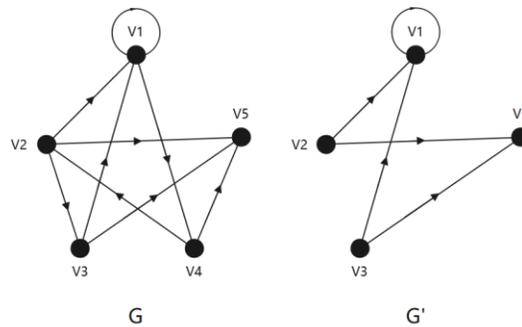


图 1

2. 下列关于图的代数表示的说法中, 正确的有 \_\_\_\_\_。

- A. 关联矩阵中能够表示自环和重边。
- B. 有向图的邻接矩阵一定不是对称矩阵。
- C. 如图 1 所示, 有向图  $G$  的邻接矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D. 有向图的关联矩阵第  $i$  行元素和是节点  $v_i$  的正度和负度之差, 非零元素个数则是节点  $v_i$  的度。

3. 下列关于道路与回路的说法中, 正确的有 \_\_\_\_\_。

- A. 在有向图  $G$  中, 如果回路  $L$  是一条简单有向回路, 那么在  $L$  中不存在重复出现的边, 但是可以出现重复的节点。
- B. 在图 2 中, 如果将  $G$  看作无向图, 则其存在欧拉道路, 但不存在欧拉回路。
- C. 一个包含 5 个节点的简单图中, 节点的度数为  $(2,3,1,2,4)$ , 那么此图中包含哈密顿道路但是不包含哈密顿回路。
- D. 在图 2 中, 有向图  $G$  包含 3 个强连通分量。

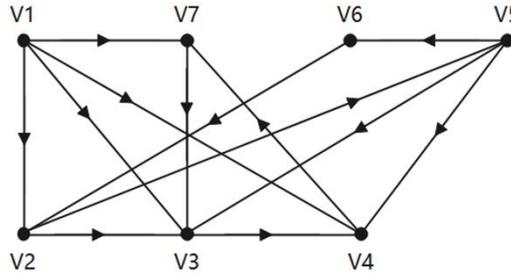


图 2

4. 下列说法中, 正确的有 \_\_\_\_\_。
- A. 如果二分图  $G$  中存在回路, 则它们都是由偶数条边组成的。
- B. 哈密顿图是有哈密顿通路的图。
- C. 空图是只有一个结点的图。
- D. 6 个结点的完全图  $G$ , 其不同构的生成树的个数为 5。
5. 下列关于树的说法中, 正确的有 \_\_\_\_\_。
- A. 含有  $n$  个结点的树, 所有结点的度数之和为  $2(n-1)$ 。
- B. 如果  $T$  是图  $G$  的导出子图, 而且又是一棵树, 则称  $T$  是  $G$  的一棵支撑树, 简称  $G$  的树。
- C. 完全二叉树所有的叶结点都出现在最低的两层上。
- D. 满二叉树中的任一结点, 如果其右子树的高度为  $k$ , 则其左子树的高度为  $k$  或  $k-1$ 。

二. 填空题: 本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。

6. 有向图  $G$  的关联矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{bmatrix}$$

则  $G$  中节点个数为 \_\_\_\_\_，所有节点的度数和为 \_\_\_\_\_，图  $G$  中 \_\_\_\_\_  
 (存在/不存在/无法判断) 重边。

7. 图 3 中的两有向图, 它们 \_\_\_\_\_ (构成/不构成) 同构关系, 如果构成, 请指出  
 结点间的映射关系; 如果不构成, 请说明理由 \_\_\_\_\_。

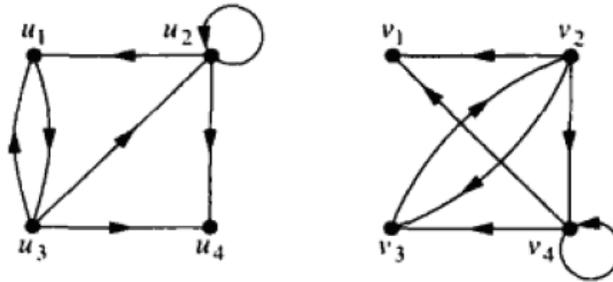


图 3

8. 图 4 无向图  $G$  中 \_\_\_\_\_ (存在/不存在) 欧拉回路, \_\_\_\_\_ (存在/不存在)  
 哈密顿道路。

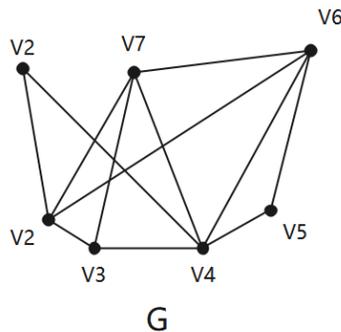


图 4

9. 高度为  $k$  的完全二叉树, 叶子结点的数量为  $2^{k-2} + m$ ,  $m$  的范围是 \_\_\_\_\_,  
 最低一层的叶子结点的数量为 \_\_\_\_\_。
10. 使用哈夫曼树对字符串 "ilovediscretmathematics" 进行编码, 得到的哈夫曼  
 树的带权路径总长为 \_\_\_\_\_。

三. 证明和解答题: 本题共 5 小题, 每题 8 分, 共 40 分。

11. 画出图 5 中无向图  $G_1, G_2$  的交、并、对称差。

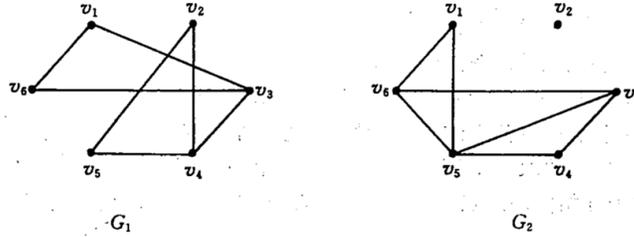


图 5

12. 已知无向图  $G$  的关联矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{bmatrix}$$

给其各边赋值权重  $w(e_1) = 5, w(e_2) = 6, w(e_3) = 3, w(e_4) = 4, w(e_5) = 5, w(e_6) = 2, w(e_7) = 7, w(e_8) = 3, w(e_9) = 1$ 。

(1) 写出图  $G$  的邻接矩阵。

(2) 用 Prim 或者 Kruskal 算法得到其最短树, 并计算该树中所有边的权值之和。

13. 若无向简单图  $G$  是欧拉图，证明或反驳：

(1) 当  $G$  的顶点数是奇数时，若补图  $\overline{G}$  是连通的，则  $\overline{G}$  中存在欧拉通路。

(2) 当  $G$  的顶点数是偶数时，若补图  $\overline{G}$  是连通的，则  $\overline{G}$  中存在欧拉通路。

14. 考虑  $M * N$  的网格，以其中的方格作为点集，任意两个点之间有边当且仅当对应的两个方格相邻，构成图  $G$ 。

(1) 当  $N$  是偶数且  $M > 1$  时，给出一种哈密顿回路的构造方法。

(2) 当  $N$  和  $M$  都是大于 1 的奇数时，证明此时  $G$  没有哈密顿回路。

15. 已知引理（教材例 2.1.3）：设  $C$  是简单图  $G$  中含结点数大于 3 的一个初级回路。如果结点  $v_i, v_j$  在  $C$  中不相邻，而边  $(v_i, v_j) \in E(G)$ ，则称  $(v_i, v_j)$  是  $C$  的一条弦。若对每一个  $v_k \in V(G)$  都有  $d(v_k) \geq 3$ ，则  $G$  中含有带弦的回路。

证明：在简单图中，若  $n \geq 4$  且  $m \geq 2n - 3$ ，则  $G$  中含有带弦的回路。

假设  $n \leq k$  时，命题成立

当  $n = k+1$  时， $m \geq 2(k+1) - 3 = 2k - 1$

①  $\exists v_i, d(v_i) = 1$ ，剩余的  $k$  个点  $m' \geq 2k - 1 - 1 = 2k - 2$

②  $\exists v_i, d(v_i) = 2$ ，连接相邻的两个点

③  $\forall v_i, d(v_i) \geq 3 \Rightarrow$  引理。