集合论

2021年12月

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

第十章 关系

- 关系是在集合上定义的一个常用的概念．例如，在自然数之间可以定义相等关系和小于关系，在命题公式之间可以定义等价关系和永真蕴涵关系，在集合A的各子集之间可以定义相等关系和包含关系．此外，在学生和课程之间存在选课关系，在课程表上反映了课程、班级、教师、教室、时间等之间的关系．关系就是联系，也就是映射．在数据库的一种重要类型关系数据库中保存了各数据项之间的关系，关系数据库中的数据结构就是按照本章所定义的关系设计的．

目录

10.1.1 二元关系的定义

- 定义10．1．1　对集合A和B，A×B的任一子集称为A到B的一个二元关系，一般记作R．若<x, y>∈R，可记作xRy;若<x,y>∉R，可记作$x \not R y$．在A=B时，A×A的任一子集称为A上的一个二元关系．二元关系可简称关系．
- 从形式上说，二元关系是笛卡儿积的子集，换句话说，它是有序对的集合．从语义上说，二元关系是集合A和B元素之间的联系．从下面的例子可以看出这种联系．

例1 设 $A=\{0,1\}, B=\{a,b\}$。则

$$R_1=\{<0,a>\}$$
$$R_2=\{<0,a>,<0,b>,<1,a>\}$$

是 A 到 B 的两个二元关系。

$$R_3=\{<0,1>,<1,0>\}$$
$$R_4=\{<0,1>,<0,0>,<1,0>\}$$

是 A 上的两个二元关系。

- 例2 设X＝{1，2，3}，定义X上的关系Dx和Lx为

  Dx={<x,y>|x∈X∧y∈X∧x整除y}

  Lx＝{<x，y>|x∈X∧y∈X∧x≤y}

于是，Dx是

Dx={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<1，2>，<1，3>}.

Lx关系是

Lx={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<1，2>，<1，3>，<2，3>}.

- 例3　对任意的集合A，在P(A)上的包有关系R1和真包含关系R2定义为

$$R1=\{<x,y>|x\in P(A)\wedge y\in P(A)\wedge x\subseteq y\}$$

$$R2=\{<x,y>|x\in P(A)\wedge y\in P(A)\wedge x\subset y\}$$

- 若$A=\{\Phi\}$，则$P(A)=\{\Phi,\{\Phi\}\}$，P(A)上的R1和R2是

$R1=\{<\Phi,\Phi>,<\Phi,\{\Phi\}>,<\{\Phi\},\{\Phi\}>\}$，

$R2=\{<\Phi,\{\Phi\}>\}$，

n 元关系

- 二元关系是二元组的集合．推广这个概念，可以用n元组的集合定义n元关系．
- 定义10．1．2 若n∈N且n>1，A1，A2，…，An是n个集合，则A1×A2×…×An的任一子集称为从A1到An上的一个n元关系．

10.1.2 特殊的关系

- 下面定义三个A上的特殊的关系.
- 定义10．1．3 对任意的集合A.

  (1)A上的恒等关系I_A定义为

  $I_A=\{<x, x>|x\in A\}$,

  (2)A上的全域关系(全关系)E_A定义为

  $E_A=\{<x, y>|x\in A \wedge y\in A\}$,

  (3) Φ是A上的空关系.
- 例4 设A＝{a，b}，则

  $I_A=\{<a, a>, <b, b>\}$,

  $E_A=\{<a, a>, <a,b>, <b, a>, <b, b>\}$

10.1.3定义域和值域

- 定义10．1．4　对A到B的一个关系R，可以定义

(1)R的定义域dom(R)为 $\mathrm{dom}(R)=\{x \mid (\exists y)(<x,y>\in R)\}$

(2)R的值域ran(R)为 $\mathrm{ran}(R)=\{y \mid (\exists x)(<x,y>\in R)\}$

(3)R的域fld(R)为 $\mathrm{fld}(R)=\mathrm{dom}(R)\cup \mathrm{ran}(R)$

- 例5　设A＝{a，b，c}，B＝{b，c，d}，A到B的关系 $R=\{<a,b>, <b,c>, <b,d>\}$，则

  dom(R)={a，b}，

  ran(R)＝{b，c，d}，

  fld(R)={a，b，c，d}.

- 定理10．1．1　对A到B的关系R如果$\langle x,y\rangle\in R$，则$x\in\cup\cup R$，$y\in\cup\cup R$

证明　已知$\langle x,y\rangle\in R$，即$\{\{x\},\{x,y\}\}\in R$．因$\{x,y\}$是R的元素的元素，故$\{x,y\}\in\cup R$．因x和y是$\cup R$的元素的元素，故$x\in\cup\cup R, y\in\cup\cup R$.

- 定理10．1．2　对A到B的关系R，则

  $fld(R)=\cup\cup R$，

证明　对任意的x，若x∈fld(R)，则 x∈dom(R)或x∈ran(R). 则存在y，使 <x,y>∈R或<y，x>∈R. 这时都有 x∈∪∪R.

对任意的t，若t∈∪∪R. 因为R的元素的形式是{{x},{x，y}}，所以必存在u，使 {{t},{t，u}}∈R

或{{u},{u，t}}∈R. 也就是t∈fld(R).

目录

10.2 关系矩阵和关系图

- 描述关系的方法有三种：集合表达式、关系矩阵和关系图，关系的定义使用了集合表达式，这一节介绍后两种方法，对有限集合上的关系，采用关系矩阵和关系图的方法，不仅使分析更加方便，而且有利于使用计算机处理，

10.2.1 关系矩阵

定义 10.2.1 设集合$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$.

(1) 若 R 是 X 到 Y 的一个关系，则 R 的关系矩阵是 $m\times n$的矩阵，

$$\mathbf{M}(R)=(r_{ij})_{m\times n}$$

矩阵元素是 r_{ij}，且

$$r_{ij}=\begin{cases}1, when <x_i,y_j>\in R\\ 0, when <x_i,y_j>\notin R\end{cases}$$

(2) 若 R 是 X 上的一个关系，则 R 的关系矩阵是 $m\times m$的矩阵，

$$\mathbf{M}(R)=(r_{ij})_{m\times m}$$

矩阵元素是 r_{ij}，且

$$r_{ij}=\begin{cases}1, when <x_i,x_j>\in R\\ 0, when <x_i,x_j>\notin R\end{cases}$$

- A到B的关系R是A×B的子集，A×B有m×n个有序对．矩阵M(R)有m行(行为横向)、n列(列为竖向)，共有m×n个元素．因此，M(R)的每个元素恰好对应A×B的一个有序对．用M(R)中元素rij的值表示有序对<xi，yj>是否在R中，因为只有∈和每两种情况，所以rij只取值0和1是合理的．

例1 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\},Y=\{y_1,y_2,y_3\}$，$X$ 到 Y 的关系 R 为

$$R=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_3>,<x_2,y_3>,<x_4,y_2>\}$$

则 R 的关系矩阵是（参照教材，x与y应该写到矩阵外）

$$M(R)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{array}{c}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{array}\\ \begin{array}{ccc}y_1&y_2&y_3\end{array}\end{array}$$

- 在矩阵右方和下方标注了X和Y的元素，标注表明，x1对应第1行，x2对应第2行，y1对应第1列，依此类推．因此，第1行第3列交点的r_{13}-1表示<x1，y3>∈R，而第3行第1列的r31＝0表示<x3，y1>每R．在使用关系矩阵时，集合X和Y中的元素分别进行了排序．这时就不必在矩阵上标注这些元素，而且也不难确定一个矩阵元素对应的有序对

例2 设 $A=\{1,2,3,4\}$，A 上的 > 关系定义为

$$>=\{<2,1>,<3,1>,<4,1>,<3,2>,<4,2>,<4,3>\}$$

则关系矩阵是

$$M(R)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

10.2.2 关系

- 定义10．2．2 设集合X＝{x1，x2，…，xm}，Y＝{y1，y2，…yn}．

  (1)若只是X到Y的一个关系，则R的关系图是一个有向图G(R)＝<V，E>，它的顶点集是V＝X∪Y，边集是E，从xi到yj的有向边eij∈E，当且仅当<xi，yj>∈R．

  (2)若R是X上的一个关系，则R的关系图是一个有向图G(R)＝<V．E>，它的顶点集是V＝X，边集是E，从xi到xj的有向边eij∈E当且仅当<xi，xj>∈R．

- 关系图中一条有向边 e_{ij} 对应 R 中的一个有序对 $< x_i, y_j >$，二者一一对应。图形表示形象直观，易于理解。

- 例3　对例1中的X到Y的关系R，关系图G(R)如图10．2．1所示．在X≠Y时．为了图示清楚，通常把定义域的元素x1，x2等画在一边，把值域中的元素y1,y2画在另一边．

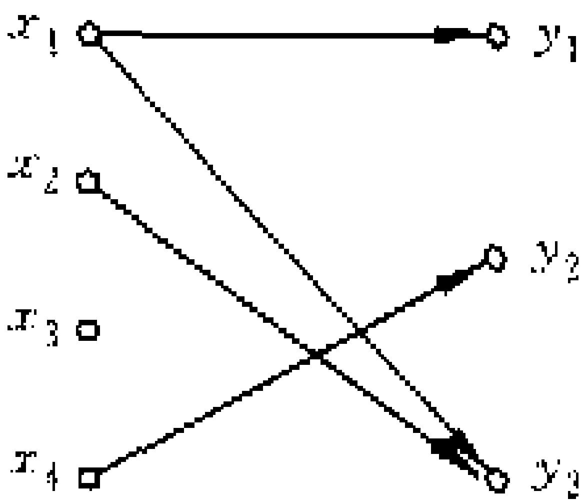


图　10. 2. 1

- 例4　对例2中的A上的关系>，关系图G(>)如图10．2．2所示．对A上的关系．关系图中一般小区分定义域和值域，每个顶点既可以发出有向边，又可以收到有向边．

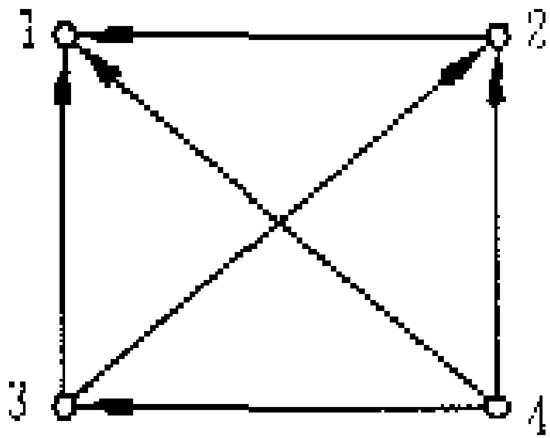


图　10.2.2

- 例5 对A={a，b,c}上的关系 R＝{<a，a>，<a，b>,<b,b>，<b，c>}，关系图G(R)如图10．2．3所示．图中从a到a的有向边e_{aa}表示<a,a>∈R，这类有向边称为自圈.

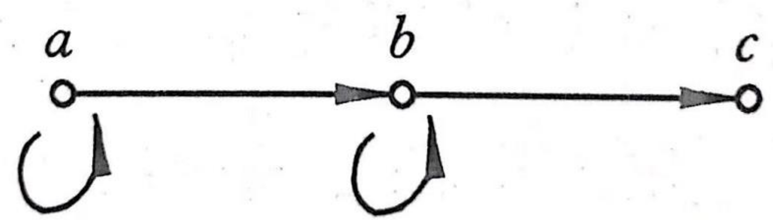


图 10.2.3

目录

10.3.1 定义

- 定义10．3．1 对X到Y的关系R，Y到Z的关系S，定义

(1)R的逆R^{-1}为Y到X的关系 $R^{-1}=\{<x, y> \mid <y, x> \in R\}$，

(2)R与S的合成$S \circ R$为X到Z的关系

$$S \circ R=\{<x, y> \mid (\exists z)(<x, z> \in R \wedge <z, y> \in S)\}.$$

此外，对任意的集合A，还可定义

(3) R 在 A 上的限制 $R \upharpoonright A$ 为 A 到 Y 的关系

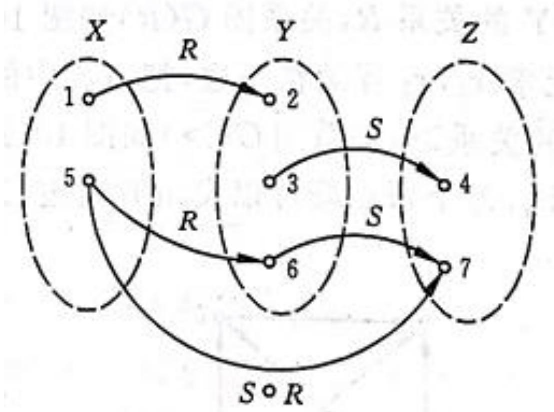
$$R \upharpoonright A = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \wedge x \in A\},$$

(4)A在R下的象R[A]为集合

$$R[A]=\{y \mid (\exists x)(x \in A \wedge <x, y> \in R)\}.$$

- 对R的每个有序对<x，y>，把两个元颠倒得到有序对<y，x>，这些<y，x>的集合就是R^{-1}. 把R的关系图中每个有向边的方向颠倒就得到R^{-1}的关系图.

- 如果在关系R和S中各有一个有序对，使<x，z>∈R且<z，y>∈S，则<x，y>是关系S°R的元素. 而且，S°R包含全部这样的有序对. 关系的合成如图10. 3. 1所示. 因为<5，6>∈R且<6，7>∈S，故<5，7>∈S°R. 虽有<1，2>∈R，但不存在y使<2，y>∈S，故没有y使<1,y>∈S°R也没有x使<x,4>∈S°R.



- 注意，X到Y的关系R和Y到Z的关系S合成为$S\circ R$，而不写成$R\circ S$(注：有的书写为$R\circ S$．)$S\circ R$是X到Z的关系．为了求$S\circ R$，应把R中每个有序对与S中每个有序对一一配合，以此确定$S\circ R$的每个有序对．
- $R\upharpoonright A$是关系R的子集，其中每个有序对$<x,y>$满足$x\in A$．可以说$R\upharpoonright A$是A到Y的关系．也可以说是X到Y的关系．当dom(R) $\in A$时，$R\upharpoonright A=R$．R[A]是一个集合，它实质上是只$R\upharpoonright A$的值域．

- 例1 设集合A上的关系R为

  A={a，{a}，{{a}}}，

  R={<a，{a}>，<{a}，{{a}}>}.

$$R^{-1} = \{<\{a\}, a>, <\{\{a\}\}, \{a\}>\}$$
$$R \circ R = \{<a, \{\{a\}\}>\}$$
$$R \restriction \{a\} = \{<a, \{a\}>\}$$
$$R \restriction \{\{a\}\} = \{<\{a\}, \{\{a\}\}>\}$$
$$R^{-1} \restriction \{a\} = \varnothing$$
$$R[\{a\}] = \{\{a\}\}$$
$$R[\{\{a\}\}] = \{\{\{a\}\}\}$$

- 例2 设集合N上的关系R和S为

$R=\{<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>, <3, 4>\}$,

$S=\{<3, 4>, <4, 5>, <5, 4>\}$.

则 $R^{-1}=\{<2, 1>, <3, 1>, <3, 2>, <4, 3>\}$,

$S\circ R=\{<1, 4>, <2, 4>, <3, 5>\}$,

$R\circ S=\Phi$.

10.3.2 S°R的关系矩阵

- R^{-1}的关系矩阵$M(R^{-1})$就是R的关系矩阵的转置矩阵．也就是说，把M(R)中每一对r_{ij}和$r_{ji}$$(i\neq j)$互换就得到$M(R^{-1})$，下面介绍求S°R的关系矩阵的方法．

如果A是有限集合，|A|=n．关系R和S都是A上的关系，R和S的关系矩阵M(R)=(rij)和M(S)＝(sij)都是nXn的方阵．于是S°R的关系矩阵

$M(S°R)＝(w_{ij})$，可以用下述的矩阵逻辑乘法计算(类似于矩阵乘法)．可以写为

$M(S°R)=M(R)M(S)$，

- 其中 $w_{ij}=\vee_{k=1\sim n}(r_{ik}\wedge s_{kj})$．这是由M(S)和M(R)的元素计算M(S，R)的元素w_{ij}的方法．式中的^和V分别为在集合{0，1}上的运算．
- ^是逻辑乘，1^1＝l，而0^1=1^0＝0^0＝0(它对应合取词)．
- V是逻辑和，0V 0＝0，1V0=0V1=1V1＝1(它对应析取词)．

- 例3 设集合$A=\{1,2,3,4\}$，A上的关系 $R=\{<1,2>,<3,4>,<2,2>\}$，$S=\{<4,2>,<2,4>,<3,1>,<1,3>\}$. 则

$$M(R)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(S)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(R \circ S) = M(S)M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} w_{14} &= (s_{11} \wedge r_{14}) \vee (s_{12} \wedge r_{24}) \vee (s_{13} \wedge r_{34}) \vee (s_{14} \wedge r_{44}) \\ &= (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ &= 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 = 1 \\ w_{21} &= (s_{21} \wedge r_{11}) \vee (s_{22} \wedge r_{21}) \vee (s_{23} \wedge r_{31}) \vee (s_{24} \wedge r_{41}) \\ &= (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) = 0 \end{aligned}$$

此外

$$M(S \circ R) = M(R)M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

10.3.3 性质

- 定理10.3.1 对X到Y的关系R和Y到Z的关系S，则

  (1)$dom(R^{-1})=ran(R)$，

  (2)$ran(R^{-1})=dom(R)$，

  (3)$(R^{-1})^{-1}=R$，

  (4)$(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$，

  证明

  (1)对任意的x，有

  $x\in dom(R^{-1})\Leftrightarrow(\exists y)(<x, y>\in R^{-1})$

  $\Leftrightarrow(\exists y)(<y, x>\in R)\Leftrightarrow x\in ran(R)$，

  所以，$dom(R^{-1})=ran(R)$.

  (2)类似于(1).

(3) 对任意的的 $<x, y>$，有

$$<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R^{-1} \Leftrightarrow <x,y>\in (R^{-1})^{-1}$$

所以，$(R^{-1})^{-1}=R$

(4) 对任意的的 $<x, y>$，有

$$\begin{aligned}<x,y>\in (S\circ R)^{-1} &\Leftrightarrow <y,x>\in S\circ R\\ &\Leftrightarrow (\exists z)(<y,z>\in R\wedge <z,x>\in S)\\ &\Leftrightarrow (\exists z)\left(<x,z>\in S^{-1}\wedge <z,y>\in R^{-1}\right)\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in R^{-1}\circ S^{-1}.\end{aligned}$$

所以，$(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$

- 定理10.3.2 对X到y的关系Q，Y到Z的关系S，Z到W的关系R，则

$$(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q)$$

证明 对任意的 $< x, y >$ 有

$$\begin{aligned}
&< x, y > \in (R \cdot S) \circ Q \\
&\quad \Leftrightarrow (\exists u)(< x, u > \in Q \wedge < u, y > \in (R \cdot S)) \\
&\quad \Leftrightarrow (\exists u)(< x, u > \in Q \wedge (\exists v)(< u, v > \in S \wedge < v, y > \in R)) \\
&\quad \Leftrightarrow (\exists v)(\exists u)(< x, u > \in Q \wedge < u, v > \in S \wedge < v, y > \in R) \\
&\quad \Leftrightarrow (\exists v)(< x, v > \in (S \circ Q) \wedge < v, y > \in R) \\
&\Leftrightarrow < x, y > \in R \circ (S \circ Q)
\end{aligned}$$

- 关系的合成是关系的运算．定理表明，这个运算满足结合律．但是它不满足交换律，一般S°R≠R°S．

- 定理10.3.3 对X到Y的关系R2和R3，Y到Z的关系R1，有

  (1)$R1\circ(R2\cup R3)=R1\circ R2\cup R1\circ R3$，

  (2)$R1\circ(R2\cap R3)\subseteq R1\circ R2\cap R1\circ R3$，

对X到Y的关系R3，Y到Z的关系R1、R2，有

  (3)$(R1\cup R2)\circ R3=R1\circ R3\cup R2\circ R3$，

  (4)$(R1\cap R2)\circ R3\subseteq R1\circ R3\cap R2\circ R3$，

  (注意，规定关系合成符优先于集合运算符．)

  证明 只证(2)，其他留作思考题，

(2) 对任意的 $<x,y>$，可得

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in R_1\circ(R_2\cap R_3)\\
\Leftrightarrow\quad & (\exists z)\,(<x,z>\in(R_2\cap R_3)\wedge<z,y>\in R_1)\\
\Leftrightarrow\ & (\exists z)\,(<x,z>\in R_2\wedge<x,z>\in R_3\wedge<z,y>\in R_1)\\
\Rightarrow\ & (\exists z)\,(<x,z>\in R_2\wedge<z,y>\in R_1)\wedge(\exists z)\,(<x,z>\in R_3\wedge<z,y>\in R_1)\\
\Leftrightarrow & <x,y>\in(R_1\circ R_2)\wedge<x,y>\in(R_1\circ R_3)\\
\Leftrightarrow & <x,y>\in(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)
\end{aligned}
$$

所以，$R_1\circ(R_2\cap R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)$

定理 10.3.4 对 X 到 Y 的关系 R 和集合 A, B, 有

(1) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$,
(2) $R[\cup \mathcal{A}] = \cup\{R[B] \mid B \in \mathcal{A}\}$,
(3) $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$,
(4) $R[\cap \mathcal{A}] \subseteq \cap\{R[B] \mid B \in \mathcal{A}\}, \mathcal{A} \neq \varnothing$,
(5) $R[A] - R[B] \subseteq R[A - B]$.

只证 (2),(3), 其他留作思考题。

(2) 对任意的 y,可得

$$
\begin{aligned}
y \in R[\bigcup A] &\Leftrightarrow y \in \operatorname{ran}(R \upharpoonright \bigcup A) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(x \in \bigcup A \wedge \langle x, y \rangle \in R) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(\exists B)(B \in A \wedge x \in B \wedge \langle x, y \rangle \in R) \\
&\Leftrightarrow (\exists B)(B \in A \wedge (\exists x)(x \in B \wedge \langle x, y \rangle \in R)) \\
&\Leftrightarrow (\exists B)(B \in A \wedge y \in R[B]) \\
&\Leftrightarrow (\exists B)(y \in R[B] \wedge R[B] \in \{R[B] \mid B \in A\}) \\
&\Leftrightarrow y \in \bigcup \{R[B] \mid B \in A\}
\end{aligned}
$$

所以,$R[\bigcup A]=\bigcup\{R[B] \mid B\in A\}$.

(3) 对任意的 y，可得

$$y \in R[A \cap B] \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \cap B \wedge \langle x, y\rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \in B \wedge \langle x, y\rangle \in R)$$

$$\Rightarrow (\exists x)(x \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge \langle x, y\rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow y \in R[A] \wedge y \in R[B]$$

$$\Leftrightarrow y \in R[A] \cap R[B]$$

所以，$R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$.

例4 设整数集合 $\mathbf{Z}$ 上的关系为 R

$R = \{< x, y > | x \in \mathbf{Z} \wedge y \in \mathbf{Z} \wedge y = x^2\}$,

集合 $A = \{1, 2\}, B = \{0, -1, -2\}$。

于是，$R[A] = \{1, 4\}, R[B] = \{0, 1, 4\}, R[A] \cap R[B] = \{1, 4\}$。但是，$A \cap B$ 是 $\varnothing$, $R[A \cap B] = \varnothing$。

此外，$A - B = \{1, 2\}, R[A - B] = \{1, 4\}$。但是 $R[A] - R[B] = \varnothing$。

目录

10. 4 关系的性质

- 在实际问题中，我们感兴趣的往往不是一般的关系，而是具有某些特殊性质的关系．为了更好地处理这些关系，有必要深入研究关系的性质．对A上的关系来说，主要的性质有：自反性、非自反性、对称性、反对称性、传递性．这一节定义这些性质，并给出若干结论．

10.4.1 定义

- 定义10．4．1　对A上的关系R，若对任意的x∈A都有xRx，则称R为A上自反的关系，若对任意的x∈A都有 $x \not R x$，则称R为A上非自反的关系.
- 这个定义也可以写成：

R是A上自反的⇔(∀x)(x∈A→xRx)，

R是A上非自反的⇔(∀x)(x∈A→ $x \not R x$)，

- 例1　在非空集合A上的恒等关系I_A。和全关系E_A都是自反的.

  在集合$B=\{x|x\in N \wedge x\neq 0\}$上的整除关系$D_B$和小于等于关系$L_B$都是自反的.

  在集合A的幂集P(A)上的包含关系$\subseteq$和相等关系$=$都是自反的，这些关系都不是非自反的.

- 例2 在非空集合A上的空关系Φ是非自反的．在集合N上的小于关系<是非自反的．在集合A的幂集P(A)上的真包含关系是非自反的.
- 这些关系都不是自反的.

- 例3 在集合A＝{l，2，3}上的关系

R＝{<1，1>，<2，2>，<3，1>}

不是自反的，也不是非自反的．但是在非空集合A上，不存在一个关系，它是自反的又是非自反的．

如果R是A上自反的，则关系矩阵M(R)的主对角线元素都是1(即r_{ii}都是1)，关系图G(R)的每个顶点都有自圈．如果R是A上非自反的，则M(R)的主对角线元素都是0，G(R)的每个顶点都没有自圈，

- 定义10．4．2 R为A上的关系，对任意的x，$y \in A$，若$xRy \to yRx$，则称R为A上对称的关系；若$(xRy \wedge yRx) \to (x=y)$，则称R为A上反对称的关系．
- 这个定义也可以写成

  R是A上对称的$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy) \to yRx)$

  R是A上反对称的

  $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx) \to x=y)$
- 反对称性还有另一种等价的定义

  R是A上反对称的

  $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge x \in A \wedge xRy \wedge x \neq y) \to y \not R x)$，

- 例4 在非空集合A上的全关系是对称的，不是反对称的，
- 例5 在$B=\{x|x\in N \wedge x\neq 0\}$上的整除关系、小于等于关系、小于关系都是反对称的。且不是对称的.
- 例6 在非空集合A上的恒等关系和空关系都是对称的，也都是反对称的，
- 例7 在集合$A=\{1，2，3\}$上的关系

  $R=\{\langle l，2\rangle，\langle 2，1\rangle，\langle 1，3\rangle\}$不是对称的，也不是反对称的.
- 例6和例7说明，对称性和反对称性既可以同叫满足，也可以都不满足.

- 如果R是A上对称的，则M(R)是对称矩阵(对任意的i和j,rij＝rji)．G(R)中任意两个顶点之间或者没有有向边，或者互有有向边eij和eji(不会只有eij没有eji)，如果R是A上反对称的，则M(R)是反对称矩阵(对任意的i≠j,若rij=1则rji=0)，G(R)中任意两个顶点之间或者没有有向边，或者仅有一条有向边(不会同时有eij和eji).

- 定义10．4．3 R为A上的关系，对任意的x，y，z∈A，若$(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$，则称R为A上传递的关系.
- 这个定义也可以写成

R是A上传递的$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)$
$((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$

- 例8 在集合A上的全关系、恒等关系、空关系都是传递的.

  在$B=\{x|x\in N \wedge x\neq 0\}$上的整除关系、小于等于关系、小于关系都是传递的,

- 例9 在集合$A=\{1, 2, 3\}$上的关系

  $R=\{<1, 2>, <2, 3>\}$

  不是传递的关系. 因为$<1, 2>\in R$, $<2, 3>\in R$. 但是$<1, 3>\notin R$

10.4.2 几个结论

下列结论可以判断一些关系具有某种性质，

- 定理10.4.1　R1,R2是A上自反的关系，则R_1^{-1}，R1∩R2，R1∪R2也是A上自反的关系.

证明　对任意的x，有

x∈A=><x，x>∈Rl^<x，x>∈R2

⇔<x，x>∈R1∩R2

所以，R1∩R2是A上自反的关系.

对R_1^{-1}和R1∪R2的证明类似.

- 定理10．4．2 R1，R2是A上对称的关系，则R_1^{-1} 、R1∩R2、R1∪R2也是A上对称的关系.

证明 对任意的<x，y>，有

$<x, y> \in R1 \cup R2 \Leftrightarrow <x, y> \in R1 \vee <x,y> \in R2$

$\Leftrightarrow <y,x> \in R1 \vee <y,x> \in R2 \Leftrightarrow <y,x> \in R1 \cup R2$

所以，R1∪R2是A上对称的关系.

对R_1^{-1}和R1∩R2的证明类似.

- 定理10．4，3 R1，R2是A上传递的关系，则R_1^{-1}，R1∩R2是A上传递的关系．

证明 对任意的<x，y>，<y，z>，有

$<x,y>\in R_1^{-1} \wedge <y,z>\in R_1^{-1}$

$\Leftrightarrow <y,x>\in R1 \wedge <z,y>\in R1$

$=> <z,x>\in R1 \Leftrightarrow <x,z>\in R_1^{-1}$

所以，R_1^{-1}是A上传递的关系．

$<x,y>\in R1\cap R2 \wedge <y,z>\in R1\cap R2$

$\Leftrightarrow <x,y>\in Rl \wedge <x,y>\in R2 \wedge <y,z>\in R1 \wedge <y,z>\in R2$

$=> <x,z>\in R1 \wedge <x,z>\in R2 \Leftrightarrow <x,z>\in R1\cap R2$

所以，R1∩R2是A上传递的关系．

- 注意，R1UR2不一定是传递的.
- 例10 在A={1，2，3}上的关系R1＝{<1，2>}，R2={<2，3>}都是A上传递的关系．但是，

  R1UR2＝{<1，2>，<2，3>}不是A上传递的，

- 定理10．4．4 R1，R2是A上反对称的关系，则R_1^{-1}及R1∩R2是A上反对称的关系，

证明 为了证明方便，把反对称性的充要条件等价改

$$(\forall x)(\forall y)(x \neq y \rightarrow (\langle x, y\rangle \notin R \vee \langle y, x\rangle \in R))$$

对任意的 $x, y \in A$，有

$$x \neq y \rightarrow (\langle x, y\rangle \notin R_1 \vee \langle y, x\rangle \notin R_1\rangle$$
$$\Leftrightarrow x \neq y \rightarrow (\langle y, x\rangle \notin R_1^{-1} \vee \langle x, y\rangle \notin R_1^{-1})$$

.

所以，R_1^{-1} 是 A 上反对称的.

$$(x \neq y \to (\langle x,y\rangle \notin R_1 \vee \langle y,x\rangle \notin R_1)) \wedge (x \neq y \to (\langle x,y\rangle \notin R_2 \vee \langle y,x\rangle \notin R_2))$$

$$\Leftrightarrow x \neq y \to ((\langle x,y\rangle \notin R_1 \vee \langle y,x\rangle \notin R_1) \wedge (\langle x,y\rangle \notin R_2 \vee \langle y,x\rangle \notin R_2))$$

$$\Rightarrow x \neq y \to (\langle x,y\rangle \notin R_1 \vee \langle y,x\rangle \notin R_1 \vee \langle x,y\rangle \notin R_2 \vee \langle y,x\rangle \notin R_2)$$

$$\Leftrightarrow x \neq y \to (\neg(\langle x,y\rangle \in R_1 \wedge \langle x,y\rangle \in R_2) \vee \neg(\langle y,x\rangle \in R_1 \wedge \langle y,x\rangle \in R_2))$$

$$\Leftrightarrow x \neq y \to (\langle x,y\rangle \notin R_1 \cap R_2 \vee \langle y,x\rangle \notin R_1 \cap R_2)$$

所以，$R_1 \cap R_2$ 是 A 上反对称的.

注意，这时R1UR2不一定是反对称的

- 例11　在A＝{1，2，3}上的关系R1={<1，2>}，R2＝{<2，1>}都是A上反对称的．但是，

R1UR2＝{<1，2>，<2，1>}不是A上反对称的，

- 定理10．4．5 对A上的关系R，则

  (1)R是对称的$\Leftrightarrow R=R^{-1}$，可得

  (2)R是反对称的$\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

证明(1)先设R是对称的，对任意的$<x,y>$，可得

$<x,y> \in R \Leftrightarrow <y,x> \in R \Leftrightarrow <x,y> \in R^{-1}$，

所以，$R=R^{-1}$

再设$R=R^{-1}$，对任意的$<x,y>$，可得

$<x,y> \in R \Leftrightarrow <x,y> \in R^{-1} \Leftrightarrow <y,x> \in R$

所以，R是对称的.

(2)先设R是反对称的，对任意的$<x, y>$，可得

$<x, y> \in R \cap R^{-1} \Leftrightarrow <x, y> \in R \wedge <x, y> \in R^{-1}$

$\Leftrightarrow <x,y> \in R \wedge <y, x> \in R$

$=> x = y => <x, y> \in I_A$

所以，$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

再设$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$，对任意的$<x,y>$，可得

$<x, y> \in R \wedge <y, x> \in R$

$\Leftrightarrow <x, y> \in R \wedge <x,y> \in R^{-1}$

$\Leftrightarrow <x, y> \in R \cap R^{-1}$

$=> <x, y> I_A => x = y$

所以，R是反对称的.

目录

10.5 关系的闭包

- 我们经常希望关系具有自反性、对称性和传递性．对于不具有这些性质的关系，可以扩充这个关系为更大的关系(原关系的超集合)，使新关系有这些性质．这种作法就是闭包思想．闭包是数学上常用的概念，下面先介绍多个关系的合成，再介绍闭包的定义、性质和构造方法．

10.5.1 多个关系的合成

- 在10．3节介绍了两个关系的合成，下面推广到多个关系的合成.
- 定义10．5．1 对A上的关系R，$n\in N$，关系R的n次幂Rn定义如下：

  (1) $R^0=\{<x,x>|x\in A\}=I_A$，

  (2) $R^{n+1}=R^n\circ R\ (n\geq 0)$.

  注意，n个关系R的合成简写为R^n，n个集合A的笛卡儿积经常也简写为A^n。二者的概念不同，却使用了相同的表示．应该注意应用的场合，以免理解错误.

- 例1 集合A={a，b，c，d}上的关系R为

R= $\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$.

则R^0、R^1、R^2、R^3、R^4、R^5的关系图如下

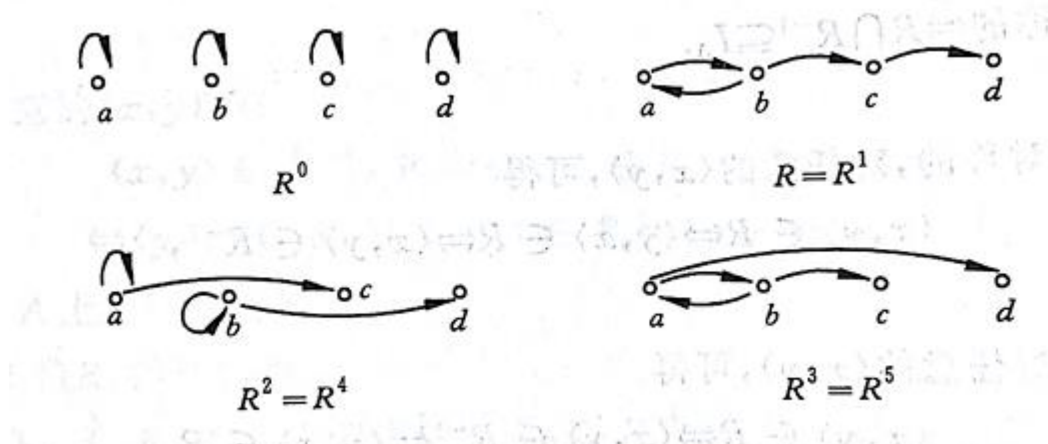


图 10.5.1

在例1中有一种有意义的现象，$R^2=R^4=R^6=\ldots$和$R^3=R^5=R^7=\ldots$. 这种现象是否普遍存在呢?下面考虑这个问题.

- 定理10．5．1 设A是有限集合，$|A|=n$，R是A上的关系，则存在自然数s和t，$s\neq t$，使得$R^s=R^t$，

证明 对$i\in N$，R^i都是A上的关系，它们都是$P(A\times A)$的元素．因$|A|=n$．则$|A\times A|=n^2$，$|P(A\times A)=2^{(n2)}$．列出R的各次幂，$R^1,R^2,R^3,\ldots,R2^{n2},\ldots$ 由鸽巢原理，至少有两个幂是相等的，即存在自然数s和t，$s\neq t$，使$R^s=R^t$，(注：鸽巢原理是组合学的基本原理．它指出：如果n+1个物体放人n个盒子里，则有一个盒子中有两个物体．)

- 定理10．5．2 设A是有限集合，R是A上的关系，m和n是非零自然数，则

  (1)$R^m \circ R^n = R^{m+n}$,

  (2)$(R^m)^n = R^{mn}$.

证明

(1)对任意的m，施归纳于n.

当n=1时，$R^m \circ R^1 = R^{m+1}$.

假设$n = k(k \geq 1)$时结论成立，即有$R^m \circ R^k = R^{m+k}$．令$n = k+1$，则

$R^m \circ R^{k+1} = R^m \circ (R^k \circ R) = (R^m \circ R^k) \circ R = R^{m+k} \circ R$

$= R^{m+k+1}$

结论得证

(2)对任意的m，施归纳于n.

当n=1时，$(R^m)^1 = R^m = R^{m*1}$,

假设$n=k(k\geq 1)$时有$(R^m)^k = R^{mk}$，令$n=k+1$，则

$$(R^m)^{k+1} = (R^m)^k \circ (R^m)$$

$$= R^{mk} \circ R^m = R^{mk+m}$$

$$= R^{m(k+1)}$$

所以，结论得证，

- 定理10．5．3 设A是有限集合，R是A上的关系，若存在自然数s和t，$s<t$，使得$R^s=R^t$，则

  (1)$R^{s+k}=R^{t+k}$，其中k为自然数；

  (2)$R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，k和i为自然数，$p=t-s$，

  (3)令$B=\{R^0，R^1，\ldots，R^{t-1}\}$，则R的各次幂均为B的元素，即对任意的自然数q，有$R^q\in B$，

证明

(1)$R^{s+k}R^{s}\circ R^{k}=R^{t}\circ R^{k}=R^{t+k}$，

(2)施归纳于k，

当$k=0$时，$R^{s+0+i}=R^{s+i}$.

假设$k=n$时有$R^{s+np+i}=R^{s+i}$，其中$p=t-s$

令$k=n+1$，

$R^{s+(n+1)p+i}=R^{s+np+p+I}$

$=R^{s+np+i}\circ R^{p}=R^{s+i}\circ R^{p}$

$=R^{s+p+i}=R^{t+i}=R^{s+i}$.

所以，结论得证.

(3)若$q<t$，由B的定义，$R^q \in B$.

若$q \geq t$，则$q-s>0$. 一定存在自然数k和i，使得$q=s+kp+i$，其中$0 \leq i \leq p-1$. 于是，

$R^q=R^{s+kp+i}=R^{s+i}$. 此外，$s+i \leq s+p-1=t-1$. 所以，$R^q=R^{s+t} \in B$

- 例2　对例1中的关系R，$R^2=R^4$，于是对应的$s=2$，$t=4$. $B=\{R^0, R^1, R^2, R^3\}$. R的幂中不相同的只有以上4种.

10.5.2 闭包的定义

- 设R是A上的关系，有时希望给R增加一些有序对构成新关系R'(显然R$\subseteq$R')，使得R'具有自反性或对称性或传递性．但不希望R'太大，希望增加的有序对尽量少．这就是建立R的闭包的基本思想．

- 定义10．5．2 对非空集合A上的关系R，如果有A上另一个关系R'，满足：

  (1)R'是自反的(对称的，传递的)，

  (2)$R \subseteq R'$，

  (3)对A上任何自反的(对称的，传递的)关系R"，$R \subseteq R'' \rightarrow R' \subseteq R''$，则称关系R'为R的自反(对称，传递)闭包，记作r(R)(s(R)，t(R))．

- 这一个定义中定义了三个闭包：自反闭包r(R)，对称闭包s(R)，传递闭包t(R)，直观上说，r(R)是有自反性的R的“最小”超集合，s(R)是有对称性的R的“最小”超集合，t(R)是有传递性的R的“最小”超集合.

- 例3 对例1中的关系R，R的r(R)，s(R)，t(R)的关系图如图10.5.2所示.

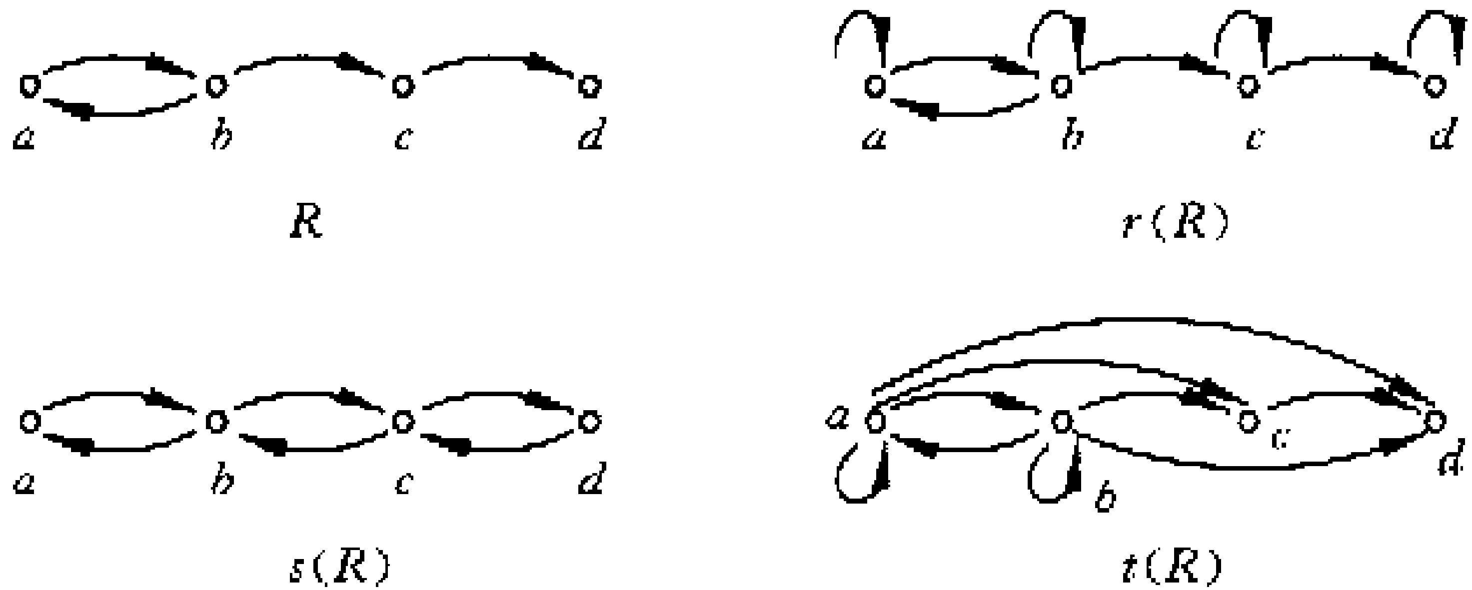


图 10.5.2

10.5.3 闭包的性质

- 定理10．5．4 对非空集合A上的关系R，有
  (1)R是自反的⇔r(R)＝R，
  (2)R是对称的⇔s(R)＝R，
  (3)R是传递的⇔t(R)＝R.

证明

(1)先设R是自反的．因为R⊆R，且任何包含R的自反关系R”，有R⊆R”．所以，R满足r(R)的定义，r(R)＝R.

再设r(R)＝R．由r(R)的定义，R是自反的.

(2)和(3)的证明类似.

- 定理10．5．5 对非空集合A上的关系R1，R2，若R1$\subseteq$R2，则

  (1)$r(R1) \subseteq r(R2)$,

  (2)$s(R1) \subseteq s(R2)$,

  (3)$t(R1) \subseteq t(R2)$.

  证明留作思考题.

- 定理10．5．6 对非空集合A上的关系R1，R2则

  (1)$r(R1) \cup r(R2) = r(R1 \cup R2)$，

  (2)$s(R1) \cup s(R2) = s(R1 \cup R2)$，

  (3)$t(R1) \cup t(R2) \subseteq t(R1 \cup R2)$.

证明

(1)因为$r(R1)$和$r(R2)$都是A上自反的关系，所以$r(R1) \cup r(R2)$是A上自反的关系．由$R1 \subseteq r(R1)$和$R2 \subseteq r(R2)$，有$R1 \cup R2 \subseteq r(R1) \cup r(R2)$．所以$r(R1) \cup r(R2)$是包含$R1 \cup R2$的自反关系．

由自反闭包定义，

$r(R1 \cup R2) \subseteq r(R1) \cup r(R2)$.

因为$R1 \subseteq R1 \cup R2$，有

$r(R1) \subseteq r(R1 \cup R2)$. 类似地

$r(R2) \subseteq r(R1 \cup R2)$，则

$r(R1) \cup r(R2) \subseteq r(R1 \cup R2)$.

(2)和(3)的证明留作思考题.

注意，定理的结论(3)是包含关系，不是相等关系，下面是真包含的例子，

- 例4 集合A＝{a，b，c}上的关系R1和R2为，R1={<a，b>}，R2＝{<b，c>}．于是，t(R1)=R1={<a，b>}，t(R2)=R2={<b，c>}．则有t(R1)Ut(R2)＝{<a，b>，<b，c>}．但是R1UR2＝{<a，b>，<b，c>}，t(R1UR2)＝{<a，b>，<b，c>，<a，c>}．显然t(R1)U t(R2)$\subset$t(R1UR2).

10.5.4 闭包的构造方法

下面介绍如何求出已知关系R的三种闭包.

- 定理10．5．7 对非空集合A上的关系R，有 $r(R)=R\cup R^0$.
- 证明 对任意的 $x\in A$，$\langle x, x\rangle\in R^0$，于是 $\langle x, x\rangle\in R\cup R^0$，所以 $R\cup R^0$ 是A上自反的，显然 $R\subseteq R\cup R^0$，所以 $R\cup R^0$ 是包含R的自反关系．对A上任意的自反关系R”，如果 $R\subseteq R''$，则对任意的 $\langle x,y\rangle$，若 $\langle x, y\rangle\in R\cup R^0$，则或者 $\langle x, y\rangle\in R$，或者 $\langle x, y\rangle\in R^0$，当 $\langle x, y\rangle\in R$，由 $R\subseteq R''$ 有 $\langle x, y\rangle\in R''$．若 $\langle x, y\rangle\in R^0$，则 $x=y$，由R”的自反性有 $\langle x, y\rangle\in R''$．两种情况都有 $\langle x, y\rangle\in R''$．因此，$R\cup R^0\subseteq R''$．总之，$R\cup R^0$ 满足r(R)的定义，$r(R)=R\cup R^0$.
- 由定理可知，很容易构造R的自反闭包，只要把所有的 $x\in A$ 构成的 $\langle x, x\rangle$ 加入R中.

- 定理10．5．8 对非空集合A上的关系R，有
  $s(R)=R\ UR^{-1}$，

证明 对任意的$<x，y>$，可得

$<x，y>\in R\ U\ R^{-1}$

$\Leftrightarrow <x，y>\in R V <x，y>\in R^{-1}$

$\Leftrightarrow <y，x>\in R^{-1} V <y，x>\in R$

$\Leftrightarrow <y，x>\in RUR^{-1}$

所以，RUR^{-1}是A上对称关系．显然有$R\subseteq RUR^{-1}$．

- 对A上任意的包含R的对称关系置R”，对任意的 $<x, y>$，若 $<x, y> \subseteq RUR^{-1}$，则 $<x, y> \in R$ 或 $<x, y> \in R^{-1}$，当 $<x, y> \in R$，由 $R \subseteq R''$ 有 $<x, y> \in R''$．当 $<x, y> \in R^{-1}$，则 $<y, x> \in R$, $<y, x> \in R''$，因R”是对称的，故 $<x, y> \in R''$．两种情况都有 $<x, y> \in R''$，则 $RUR^{-1} \subseteq R''$，

  总之，RUR-1满足s(R)的定义，所以 $s(R) = RUR^{-1}$．

- 由定理可知，很容易构造R的对称闭包，只要对任何 $<x, y> \in R$ 且 $<y, x> \notin R$ 把 $<y, x>$ 加入R中．

- 定理10．5．9 对非空集合A上的关系R，有$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$.

证明 先证$R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\subseteq t(R)$．为此只要证明对任意的$n\geq 1$，$n\in N$．有$R^n\subseteq t(R)$

施归纳于n.

当$n=1$时，$R^1=R\subseteq t(R)$.

假设$n=k$时有$R^k\subseteq t(R)$．令$n=k+1$，对任意的$<x, y>$有

$<x, y> \in R^{k+1} \Leftrightarrow <x, y> \in R^k \circ R$

$\Leftrightarrow (\exists z)(<x, z> \in R \wedge <z, y> \in R^k)$

$\Rightarrow (\exists z)(<x, z> \in t(R) \wedge <z, y> \in t(R))$

$\Rightarrow <x, y> \in t(R)$

所以，$R^{k+1} \subseteq t(R)$.

由归纳法，对$n \in N$，$n \geq 1$，有$R^n \subseteq t(R)$.

于是$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq t(R)$.

再证$t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$. 对任意的$<x, y>$和$<y, z>$，

可得$<x, y> \in R \cup R^1 \cup R^2 \cup \ldots \wedge <y, z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$

$\Leftrightarrow (\exists s)(<x, y> \in R^s) \wedge (\exists t)(<y, z> \in R^t)$

其中s和t是非零自然数

$\Rightarrow (\exists s)(\exists t)(<x, z> \in R^t \circ R^s)$

$\Leftrightarrow (\exists s)(\exists t)(<x, z> \in R^{t+s})$

$\Rightarrow <x, z> \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

所以，$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$是传递的，此外它包含R．所以

$t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$,

总之，$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$.

- 通常简写为

  $R^{+}=\cup_{k=1\sim\infty}R^{k}=R\cup R^{2}\cup R^{3}\cup\ldots,$

  而且

  $R^{*}=\cup_{k=1\sim\infty}R^{k}=R^{0}\cup R\cup R^{2}\cup R^{3}\cup\ldots,$

- 定理10．5．3指出，在R，R^{2}，…中只有有限个不同的合成关系．所以在计算$t(R)=R^{+}$时，可以只用有限个合成关系．

- 定理10.5.10 A为非空有限集合, $|A|=n$, R是A上的关系，则存在一个正整k≤n，使得 $t(R)=R^+=R\cup R^2\cup\ldots\cup R^k$,

证明 设有<x，y>∈R^+，则存在整数p>0，使得<x，y>∈R^p，即存在序列x0=x，x1，x2，…，x_{p-1}，x_p=y，有<x0，x1>∈R，<x1，x2>∈R，…，<x_{p-1}，x_p>∈R．设满足上述条件的最小的p，有p>n，则p+1个元素x0，x1，x2，…，x_{p-1}，x_p都是A中的n个元素，p+1个元素中必有两个相等，即有0≤t<q≤p使xt＝xq，因此序列可以去掉中间一段成为<x0,x1>∈R,…,<xt-1,xt>∈R，和<x_t,x_{q+1})∈R，…，<x_{p-1}，x_p>∈R两段．第一段有t个有序对，第二段有p-q个有序对．因此，<x0，xp>＝<x，y>∈R^k，其中k＝t+p-q-p-(q-t)<p．这与p为最小的假设矛盾，故p>n不成立．

- 由此定理可知，这时的R^+不妨写成$R^+ = t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$.
- 例5 集合A＝{a，b，c}上的关系R为

  R＝{<a，b>，<b，c>，<c，a>}.

  则 $r(R)=R \cup R^0$

  ＝{<a，b>，<b，c>，<c，a>，<a，a>，<b，b>，<c，c>}.

  而 $s(R)=R \cup R^{-1}$ ＝{<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，b>，<c，a>，<a，c>}.

由

$$M(R)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\quad M(R^2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad M(R^3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则

t(R)＝RUR2UR3

＝{<a，b>，<a，c>，<b，c>，<b，a>，
<c，a>，<c,b>，
<a，a>，<b，b>，<c，c>}.

- 当有限集合A的元素较多时，用矩阵运算求A上的关系R的传递闭包仍很复杂．1962年Warshall提出了一种有效的算法，
- Warshall算法：(令B[j，i]表示矩阵B第j行第i列的元素)

  (1)令矩阵B＝M(R)，

  (2)令i＝1，n＝|A|，

  (3)对1≤j≤n，如果B[j，i]=1，则对1≤k≤n，令B[j，k]＝B[j，k]∨B[i，k]，

  (4)i加1，

  (5)若i≤n，则转到(3)，否则停止，且$M(R^{+})=B$.

- 例6　A上的关系R的关系矩阵为

$$M(R)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

令 $B=M(R)$.

$i=1$ 时，第 1 列只有 $B[1,1]=1$，将第 1 行与第 1 行各对应元素作逻辑加，仍记于第 1 行.

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$i=2$ 时，第 2 列中 $B[1,2]=1$，将第 1 行与第 2 行各对应元素作逻辑加，记于第 1 行. 第 2 列还有 $B[4,2]=1$，将第 4 行与第 2 行对应加，记于第 4 行.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$i=3$ 时，第 3 列全是 0，$\boldsymbol{B}$ 不变.

$i=4$ 时，第 4 列中 $\boldsymbol{B}[1,4]=\boldsymbol{B}[2,4]=\boldsymbol{B}[4,4]=1$，将 1，2，4 这 3 行分别与第 4 行对应元素逻辑加，分别记于 1，2，4 这 3 行.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{这就是 } \boldsymbol{M}(R^+).$$

- 有时希望所求的闭包具有两种或三种性质．应该先作哪种闭包运算呢?下面分析这个问题．
- 定理10．5．11　对非空集合A上的关系R，有
  (1)若R是自反的，则s(R)和t(R)是自反的，
  (2)若R是对称的，则r(R)和t(R)是对称的，
  (3)若R是传递的，则r(R)是传递的．

证明　只证 (2)，其他留作思考题

先证 $r(R)$ 是对称的。对任意的 $x, y \in A$，如果 $x = y$，则

$$\langle x, y\rangle \in r(R) \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in r(R)$$

如果 $x \neq y$，则

$$\begin{aligned}
&< x, y > \in r(R) \Leftrightarrow < x, y > \in R \cup R^0 \\
&\Rightarrow < x, y > \in R \\
&\Rightarrow < y, x > \in R \\
&\Rightarrow < y, x > \in R \cup R^0 \Leftrightarrow < y, x > \in r(R)
\end{aligned}$$

总之，$r(R)$ 是对称的。

再证$t(R)$是对称的．为此先证，若R对称，则对非零自然数n，有R^n是对称的．施归纳于n.

当$n=1$时，$R^1=R$是对称的.

假设$n=k(k\geq 1)$时R^k是对称的．令$n=k+1$，对任意的$<x, y>$，可得

$<x, y>\in R^{k+1} \Leftrightarrow <x, y>\in R^k \circ R$

$\Leftrightarrow (\exists z)(<x, z>\in R \wedge <z, y>\in R^k)$

$\Rightarrow (\exists z)(<z, x>\in R \wedge <y, z>\in R^k)$

$\Leftrightarrow <y, x>\in R \circ R^k \Leftrightarrow <y, x>\in R^{k+1}$

则R^{k+1}是对称的．对非零自然数n，有R^n是对称的.

对任意的$<x, y>$，可得

$<x, y>\in t(R) \Leftrightarrow (\exists n)(<x, y>\in R^n)$

$\Rightarrow (\exists n)(<y, x>\in R^n) \Leftrightarrow <y, x>\in t(R)$所以，$t(R)$是对称的.

- 定理10．5．12 对非空集合A上的关系R，有

  (1) $rs(R)=sr(R)$,

  (2) $rt(R)=tr(R)$,

  (3) $st(R) \subseteq ts(R)$

  其中$rs(R)=r(s(R))$，其他类似.

证明

$(1) sr(R)=s(R\cup R^0)$

$=(R\cup R^0)\cup(R\cup R^0)^{-1}$

$=R\cup R^0\cup R^{-1}\cup(R^0)^{-1}=R\cup R^{-1}\cup R^0$

$=(R\cup R^{-1})\cup(R\cup R^{-1})^0=rs(R)$.

(2)先证$(R\cup R^0)^n = R^0\cup R^1\cup\ldots\cup R^n$，施归纳于n.

当n＝1时，$(R\cup R^0)^1 = R\cup R^0 = R^0\cup R^1$.

假设n=k(k≥1)时有$(R\cup R^0)^k = R^0\cup R^1\cup\ldots\cup R^k$，令n=k＋1，则有

$(R\cup R^0)^{k+1} = (R\cup R^0)^k o (R\cup R^0)$

$=(R^0\cup R^1\cup\ldots\cup R^k) o (R\cup R^0)$

$=((R^0\cup R^1\cup\ldots\cup R^k) o R)\cup((R^0\cup R^1\cup\ldots\cup R^k) o R^0)$

$=(R^1\cup R^2\cup\ldots\cup R^{k+1})\cup(R^0\cup R^1\cup\ldots\cup R^k)$

$=R^0\cup R^1\cup\ldots\cup R^{k+1}$.

利用这个结论

$tr(R)=t(R\cup R^0)$

$(R\cup R^0)\cup(R\cup R^0)^2\cup(R\cup R^0)^3\cup\ldots$

$=(R^0\cup R^1)\cup(R^0\cup R^1\cup R^2)\cup\ldots$

$=R^0\cup R^1\cup R^2\cup R^3\cup\ldots = R^0\cup t(R)$

$=t(R)\cup(t(R))^0 = rt(R)$.

(3)因为R$\subseteq$s(R)，所以t(R)$\subseteq$ts(R)和st(R)$\subseteq$sts(R). 因为ts(R)是对称的，所以sts(R)=ts(R). 因此st(R)$\subseteq$ts(R).

由定理可知，若要求出R的自反，对称且传递的闭包，则应先求r(R)，再求sr(R)，最后求tsr(R). 若先求tr(R)，再求str(R)，则str(R)不一定是传递的.

目录

10.6 等价关系和划分

- 在实数之间的相等关系、在集合之间的相等关系、在谓词公式之间的等值关系具有类似的性质．它们都具有自反性、对称性和传递性．下面把具有这三种性质的关系称为等价关系．
- 这是一类很重要的关系，可以用集合上的等价关系把该集合划分成等价类，

10.6.1 等价关系

- 定义10．6，1 对非空集合A上的关系R，如果R是自反的、对称的和传递的，则称R为A上的等价关系.
- 例1 在非空集合A上的恒等关系I_A和全关系E_A都是等价关系，在所有谓词公式的集合上的等值关系⇔也是等价关系.

- 例2　集合A＝{1，2，…，8}上的关系R＝{<x，y>|x≡y(mod3)}．其中x≡y(mod3)表示x-y可被3整除，

　对任意的x，y，z∈A，x-x可被3整除．若x-y可被3整除，则y-x也可被3整除．若x-y和y-z可被3整除，则x-z=(x-y)+(y-z)可被3整除．所以，R具有自反性、对称性和传递性，R是A上的等价关系．

- R的关系图如图所示．在图中，A的元素被分成三组，每组中任两个元素之间都有关系，而不同组的元素之间都没有关系．这样的组称为等价类．

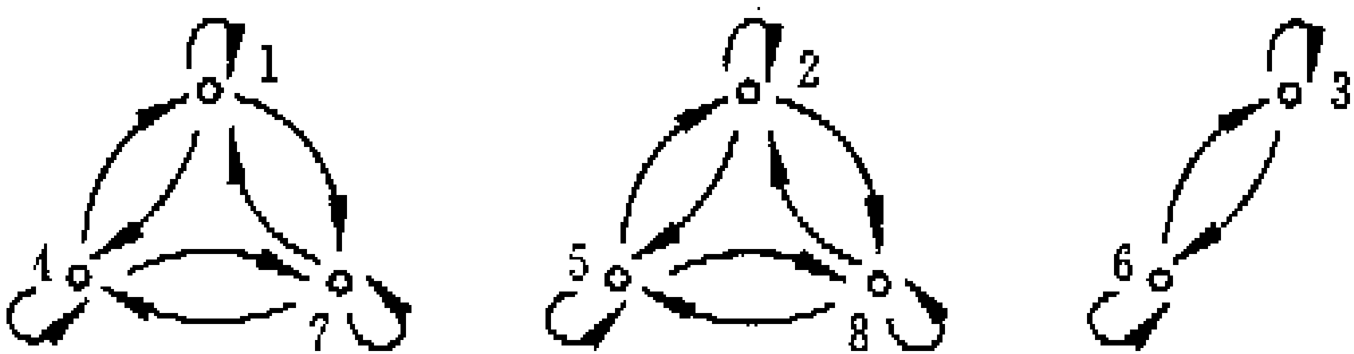
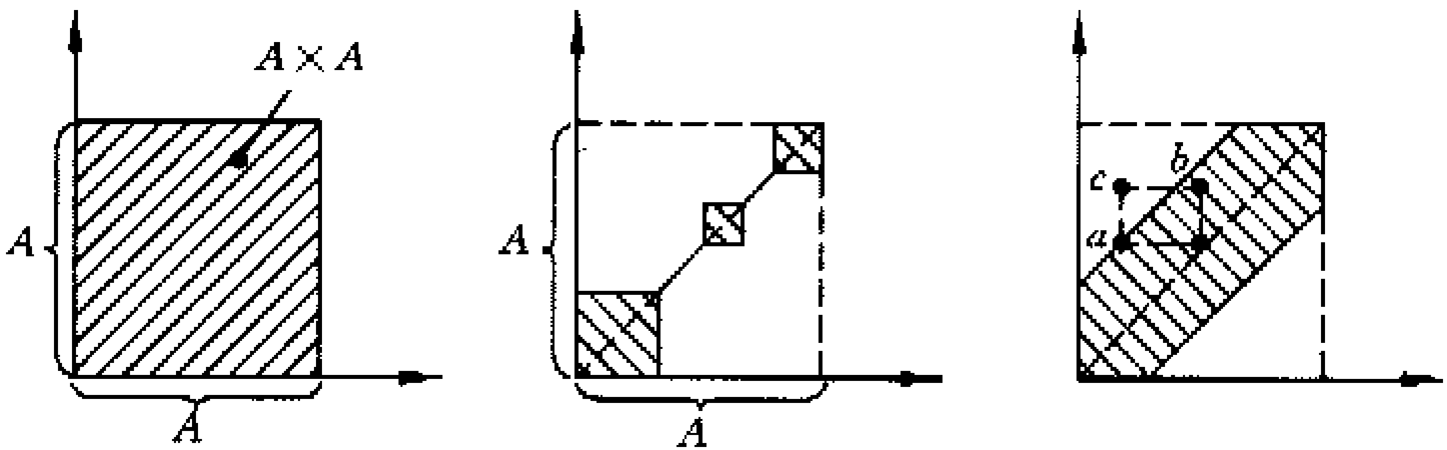


图 10.6.1

- 第9章给出了用平面坐标系中的矩形表示笛卡儿积A×B的图形表示法，显然可以用正方形表示A×A，如图(a)所示．A上的关系是A×A的子集，因此可以用正方形的子集表示．A上的等价关系可以用正方形的一条对角线和线上的若干正方形表示．如图(b)所示．但是图(c)所示表示的关系不是等价关系．它包括了对角线，所以有自反性．它以对角线为对称轴，所以有对称性．但它没有传递性．因为R中的a和b点对应的有序对，经传递得到c点对应的有序对应在R中，但c点不在R中，



(a) (b) (c)

- 定义10．6．2 R是非空集合A上的等价关系，对任意的$x\in A$，令$[x]_R=\{y|y\in A \wedge xRy\}$，则称集合$[x]_R$为x关于R的等价类，简称x的等价类，也可记作[x]
- 例3　对例2的等价关系R，有三个不同的等价类：

  $[1]_R=\{1，4，7\}=[4]_R=[7]_R$，

  $[2]_R=\{2，5，8\}=[5]_R=[8]_R$，

  $[3]_R=\{3，6\}=[6]_R$.
- A的8个元素各有一个等价类．各等价类之间，或者相等，或者不相交，而且所有等价类的并集就是A.

- 定理10．6．1 R是非空集合A上的等价关系，对任意的x，$y \in A$，成立

  (1)$[x]_R \neq \Phi$ 且$[x]_R \subseteq A$，

  (2)若xRy， 则$[x]_R = [y]_R$，

  (3)若$x \not R y$，则$[x]_R \cap [y]_R = \Phi$，

  (4)$\cup\{[x]_R | x \in A\} = A$.

证明

(1)对任意的$x \in A$，xRx，则$x \in [x]_R$，因此$[x]_R \neq \Phi$．由等价类定义，显然$[x]_R \subseteq A$.

(2)对任意的$x_0 \in [x]_R$，有xRx_0，由对称性，有x_0Rx.由xRy和传递性，有x_0Ry,yRx_0，所以$x_0 \in [y]_R$.类似可证$x_0 \in [y]_R \rightarrow x_0 \in [x]_R$．因此，$[x]_R = [y]_R$.

(3)假设$[x]_R \cap [y]_R \neq \Phi$．则存在$x_0$，使得$x_0 \in [x]_R$且$x_0 \in [y]_R$，即$xRx_0$且$yRx_0$，由对称性$x_0Ry$，由传递性$xRy$．与已知矛盾．

(4)对任意的$x \in A$，$[x]_R \subseteq A$．则有$\cup\{[x]_R|x \in A\} \subseteq A$．反之，对任意的$x \in A$，$x \in [x]_R$，则有$x \in \cup\{[x]_R|x \in A\}$．所以，$A \subseteq \cup\{[x]_R|x \in A\}$．因此$\cup\{[x]_R|x \in A\} = A$．

- 由定理可知，对A上的等价关系R，所有等价类的集合具有很好的性质，

- 定义10．6．3 对非空集合A上的关系R，以R的不相交的等价类为元素的集合称为A的商集，记作A／R，
- 这个定义也可以写成

  $A/R=\{y|(\exists x)(x\in A \wedge y=[x]R)\}$.
- 例4 对例2中的A和R，商集是

  $A/R=\{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$

  $=\{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8), \{3, 6\}\}$.

10.6.2 划分

- 定义10．6．4 对非空集合A，若存在集合，满足下列条件：

  (1)$(\forall x)(x\in\pi\rightarrow x\subseteq A)$，

  (2) $\Phi\notin\pi$

  (3)$\cup\pi = A$，

  (4)$(\forall x)(\forall y)((x\in\pi \wedge y\in\pi \wedge x\neq y)\rightarrow x\cap y=\Phi)$，则称$\pi$为A的—个划分，称$\pi$中的元素为A的划分块.

- A的一个划分π，是A的非空子集的集合(即$\pi\subseteq P(A)$且$\Phi\notin\pi$)，A的这些子集互不相交，且它们的并集为A.

- 例5 对集合A＝{a，b，c，d}．则 $\pi 1$＝{{a}，{b，c}，{d}}和 $\pi 2$＝{{a，b，c，d}}都是A的划分．{a}，{b，c}，{d}为$\pi 1$的划分块．

  但是$\pi 3$={{a，b}，{c}，{a，d}}

  和 $\pi 4$＝{{a，b，d}}

  都不是A的划分．

- 定理10．6．2 对非空集合A上的等价关系R，A的商集A／R就是A的划分，它称为由等价关系R诱导出来的A的划分，记作πR.
- 证明可以由定义10．6．3、定义10．6．4和定理10．6．1直接得到.
- 上面说明，由A上的等价关系R可以诱导出A的一个划分．下面考虑，由A的一个划分如何诱导出A上的一个等价关系.

- 定理10．6．3 对非空集合A的一个划分，，令A上的关系Rπ为

  $R\pi = \{<x, y> \mid (\exists z)(z \in \pi \wedge x \in z \wedge y \in z)\}$

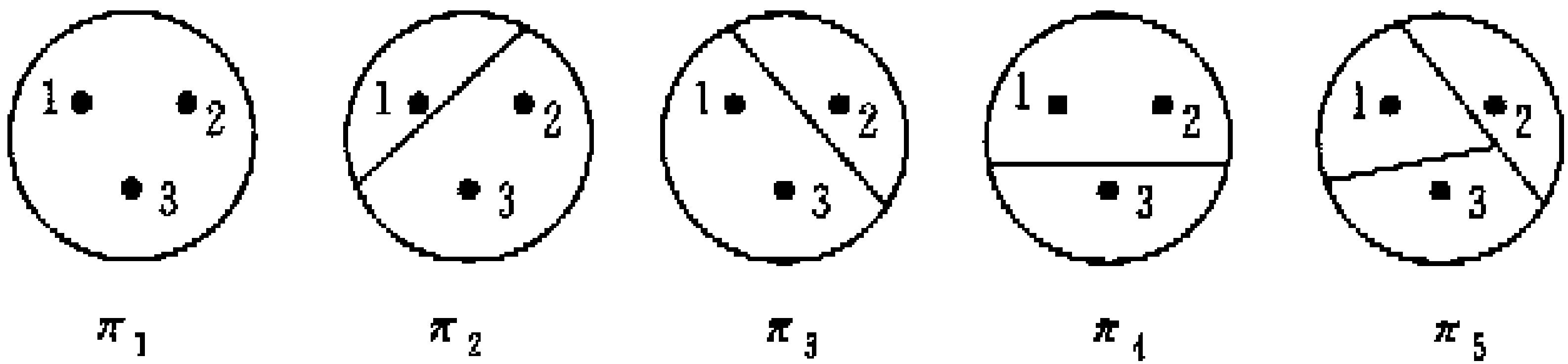
- 则置R为A上的等价关系，它称为划分π诱导出的A上的等价关系.
- 证明留作思考题.

- 定理10.6.4 对非空集合A的一个划分π和A上的等价关系R，π诱导R当且仅当R诱导π，

证明 先证必要性．若π诱导R，且R诱导π’．对任意的x∈A，设x在π的划分块B中，也在π’的划分块B‘中．对任意的y∈A，有y∈B⇔xRy(x∈B且π诱导R)
⇔$[x]_R=[y]_R$(R为等价关系)⇔y∈B'(x∈B'且R诱导π')
所以，B=B'．由x的任意性，π＝π'.
再证充分性．若R诱导π，且π诱导R'．对任意的x，y∈A，可得xRy⇔$[x]_R=[y]_R$⇔x∈$[x]_R$^y∈$[x]_R$
⇔x和y在x的同一划分块中⇔xR'y
所以，R＝R'.

- 由定理可知，集合A的划分和A上的等价关系可以建立一一对应.

- 例6 在集合A＝{1，2，3}上求出尽可能多的等价关系．先求A的所有划分，如图所示，



于是可得到5个等价关系.

R1={<1，2>，<2，1>，<1，3>，<3，1>，<2，3>，<3，2>，<1，1>，<2，2>，<3，3>}，

R2={<2，3>，<3，2>，<1，1>，<2，2>，<3，3>}，

R3={<1，3>，<3，1>，<1，1>，<2，2>，<3，3>}，

R4={<1，2>，<2，1>，<1，1>，<2，2>，<3，3>}，

R5={<1，1>，<2，2>，<3，3>}.

目录

- 10.1 二元关系
- 10.2 关系矩阵和关系图
- 10.3 关系的逆、合成、限制和象
- 10.4 关系的性质
- 10.5 关系的闭包
- 10.6 等价关系和划分
- 10.7 相容关系和覆盖
- 10.8 偏序关系

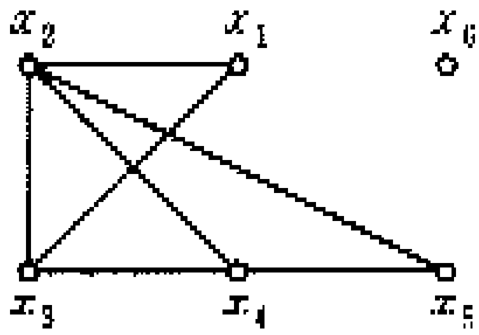
10.7.1 相容关系

- 定义10．7．1 对非空集合A上的关系R，如果R是自反的，对称的，则称R为A上的相容关系．
- 例1 A是英文单词的集合

A={cat，teacher，cold，desk，knife，by}，

A上的关系R为R={<x，y>|x和y至少有一相同字母}，显然，R是自反的、对称的，但不是传递的．因此，R是相容关系．

- 相容关系的关系图中,每个顶点都有自圈,而且若一对顶点间有边则有向边成对出现．因此可以简化关系图,可以不画自圈,并用无向边代替一对来回的有向边．对例1的R,设x1=cat,x2＝teacher,x3＝cold,x4=desk,x5=knife,x6＝by,则关系图可以简化如图



- 定义10．7．2 对非空集合A上的相容关系R，若$C \subseteq A$，且C中任意两个元素x和y有xRy，则称C是由相容关系R产生的相容类，简称相容类.
- 这个定义也可以写成 $C=\{x \mid x \in A \wedge (\forall y)(y \in C \rightarrow xRy)\}$.
- 例2 对例1中的相容关系R，相容类有{x1，x2}，{x3，x4}，{x6}，{x2，x4，x5}等，前两个相容类都可以加入其他元素，构成更大的相容类．如{x1，x2}加入x3得到另一相容类{x1，x2，x3}．后两个相容类再加入任何新元素都不是相容类了，这两个相容类称为最大相容类，

- 定义10．7．3 对非空集合A上的相容关系R，一个相容类若不是任何相容类的真子集，就称为最大相容类，记作C_R.
- 对最大相容类CR有下列性质：
  $(\forall x)(\forall y)((x \in C_R \wedge y \in C_R) \rightarrow xRy)$
  和 $(\forall x)(x \in A-C_R \rightarrow (\exists y)(y \in C_R \wedge x \not R y))$.
- 在相容关系的简化图中，最大完全多边形是每个顶点与其他所有顶点相连的多边形，这种最大完全多边形的顶点集合，才是最大相容类，此外，一个孤立点的集合也是最大相容类；如果两点连线不是最大完全多边形的边，这两个顶点的集合也是最大相容类，

- 例3　对例1中的相容关系R，最大相容类有{x1，x2，x3}，{x2，x3,x4}，{x2，x4，x5}和{x6}；
- 定理10．7．1　对非空有限集合A上的相容关系R，若C是一个相容类，则存在一个最大相容类C_R，使C⊆CR.

证明　设A＝{a1，a2，...,an}．构造相容类的序列C0⊂C1⊂C2⊂...

- 使$C_0=C$，$C_{i+1}=C_i\cup\{a_j\}$，而j是满足$a_j\notin C_i$且a_j与C_i中各元素有关系R的最小下标，因为$|A|=n$，所以至多经过$n-|C|$步，过程就结束，而且序列中最后一个相容类是C_R. 结论得证.
- 对任意的$a\in A$，有相容类$\{a\}$. 它必定包含在某个C_R中. 所以，C_R的集合覆盖住A.

10.7.2 覆盖

- 定义10．7．4 对非空集合A，若存在集合Ω满足下列条件：

  (1)$(\forall x)(x\in\Omega\rightarrow x\subseteq A)$，

  (2)$\Phi\notin\Omega$，

  (3)$\cup\Omega=A$，

  则称Ω为A的一个覆盖，称Ω中的元素为Ω的覆盖块，

  一个划分是一个覆盖，但一个覆盖不一定是一个划分．因为划分中各元素不相交，覆盖中各元素可能相交．

- 定理10．7．2 对非空集合A上的相容关系R，最大相容类的集合是A的一个覆盖，称为A的完全覆盖，记作$C_R(A)$．而且$C_R(A)$是唯一的．
- 证明从略．

- 定理10．7．3 对非空集合A的一个覆盖$\Omega=\{A1, A2, \ldots, An\}$，由$\Omega$确定的关系$R=A1 \times A1 \cup A2 \times A2 \cup \ldots \cup An \times An$ 是A上的相容关系.
- 证明从略.
- 由A上的一个相容关系R，可以确定一个A的完全覆盖$C_R(A)$．由A的一个覆盖，也可确定一个A上的相容关系．但是不同的覆盖，可能确定同一个相容关系.

- 例4 集合A={1，2，3，4}的两个覆盖 Ω1={{1，2，3}，{3，4}}和Ω2＝{{1，2}，{2，3}，{3，1}，{3，4}}可以确定相同的相容关系

  R＝{<1，2>，<2，1>，<1，3>，<3，1>，<2，3>，<3，2>，<3，4>，<4，3>，<1，1>，<2，2>，<3，3>，<4，4>}，

目录

- 10.1 二元关系
- 10.2 关系矩阵和关系图
- 10.3 关系的逆、合成、限制和象
- 10.4 关系的性质
- 10.5 关系的闭包
- 10.6 等价关系和划分
- 10.7 相容关系和覆盖
- 10.8 偏序关系

10.8 偏序关系

- 在实数之间的小于等于关系，在集合之间的包含关系具有类似的性质．它们都具有自反性、反对称性和传递性．下面把具有这三种性质的关系称为偏序关系．它和等价关系同为很重要的关系．

10.8.1 偏序关系和拟序关系

- 定义10.8．1　对非空集合A上的关系R，如果R是自反的、反对称的和传递的，则称R为A上的偏序关系．
- 在不会产生误解时，偏序关系R通常记作≤．当xRy时，可记作x≤y，读作x“小于等于”y．
- 例1　在集合N-{0}上的小于等于关系和整除关系，都是偏序关系．对集合A，在P(A)上的包含关系也是偏序关系，

- 定义10．8．2 对非空集合A上的关系R，如果R是非自反的和传递的，则称R为A上的拟序关系，
- 在不会产生误解时，拟序关系R通常记作$<$，当xRy时，可记作$x<y$，读作x“小于”y.
- 例2 在集合N上的小于关系是拟序关系．对集合A，在P(A)上的真包含关系也是拟序关系.
- 偏序关系又称弱偏序关系，或半序关系，拟序关系又称强偏序关系.

- 定理10．8．1 A为A上的拟序关系，则R是反对称的．

证明 假设R不是反对称的．则存在x∈A，y∈A，x≠y，使<x，y>∈R且<y，x>∈R．由传递性，<x，x>∈R．与非自反性矛盾．

- 有的书上把反对称性也作为拟序关系定义的—个条件．定理表明，这是不必要的．
- 定理10．8．2 对A上的拟序关系R，$R \cup R^0$是A上的偏序关系．

  证明从略．
- 定理10．8．3 对A上的偏序关系R，$R-R^0$是A上的拟序关系，

  证明从略．
- 拟序关系和偏序关系的区别只是自反性．由于它们类似，只要把偏序关系搞清，拟序关系也容易搞清．以下只讨论偏序关系．

- 定义10．8．3 集合A与A上的关系R一起称为一个结构．集合A与A上的偏序关系R一起称为一个偏序结构，或称偏序集，并记作$<A, R>$．
- 例3 $(N, \leq)$和$<P(A), \subseteq>$都是偏序集．

10.8.2 哈斯图

- 利用偏序关系的良好性质，可以把它的关系图简化为较简单的哈斯图，首先，由于自反性，每个顶点都有自圈，则可不画自圈．其次，由于反对称性，两个顶点之间至多一条有向边，则可约定箭头指向上方或斜上方并适当安排顶点位置，以便用无向边代替有向边．最后，由于传递性，依传递可得到的有向边可以不画．下面定义盖住关系，并给出作图规则，

- 定义10．8．4 对偏序集$\langle A, \leq \rangle$，如果x，$y \in A$，$x \leq y$，$x \neq y$，且不存在元素$z \in A$使得$x \leq z$且$z \leq y$，则称y盖住x．A上的盖住关系corA定义为

  $\mathrm{cov}A = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge y\text{盖住}x\}$.

- 例4 集合$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$上的整除关系$D_A$是$A$上的偏序关系．则$A$上的盖住关系covA为

  $\mathrm{cov}A = \{\langle l, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 4, 12\rangle, \langle 6, 12\rangle\}$.

- 对偏序集$<A, \leq>$，A上的盖住关系covA是唯一的．可以用盖住关系画偏序集的哈斯图．作图规则为：

(1)每个顶点代表A的一个元素，

(2)若$x \leq y$且$x \neq y$，则顶点y在顶点x上方，

(3)若$<x, y> \in covA$，则x，y间连无向边，

- 例5 例4中偏序集的哈斯图如图10.8.1.
- 例6 对A＝{a，b，c}，<P(A)，⊆>是偏序集，它的哈斯图如图10．8．2.

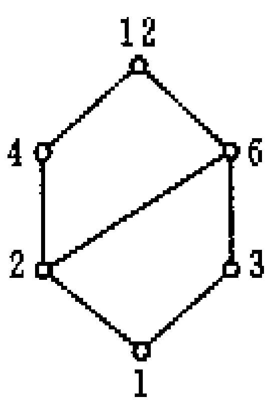


图 10.8.1

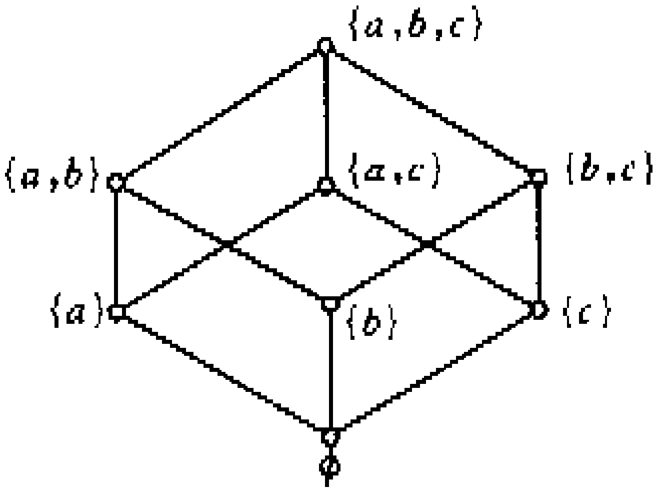


图 10.8.2

10.8.3 上确界和下确界

- 定义10．8．5 对偏序集<A，≤>，且B $\subseteq$ A，进一步

 (1)若$(\exists y)(y\in B \wedge (\forall x)(x\in B\rightarrow y\leq x))$，则称y为B的最小元，

 (2)若$(\exists y)(y\in B \wedge (\forall x)(x\in B\rightarrow x\leq y))$，则称y为B的最大元，

 (3)若$(\exists y)(y\in B \wedge (\forall x)((x\in B \wedge x\leq y)\rightarrow x=y))$，则称y为B的极小元，

 (4)若$(\exists y)(y\in B \wedge (\forall x)((x\in B \wedge y\leq x)\rightarrow x=y))$，则称y为B的极大元，

- 例7 在例4的偏序集<A，D_A)的哈斯图中．令B1＝{2，4，6，12}，则B1的最大元和极大元是12，最小元和极小元是2，令B2＝{2，3，4，6}，则B2的极大元是4和6，极小元是2和3，没有最大元和最小元．
- 注意区别最小元与极小元．B的最小元应小于等于B中其他各元．B的极小元应不大于B中其他各元(它小于等于B中一些元，并与B中另一些元无关系)，最小元(最大元)不一定存在，若存在必唯一．在非空有限集合B中，极小元(极大元)必存在，不一定唯一．

- 定义10．8．6 对偏序集<A，≤>，且B⊆A，进一步

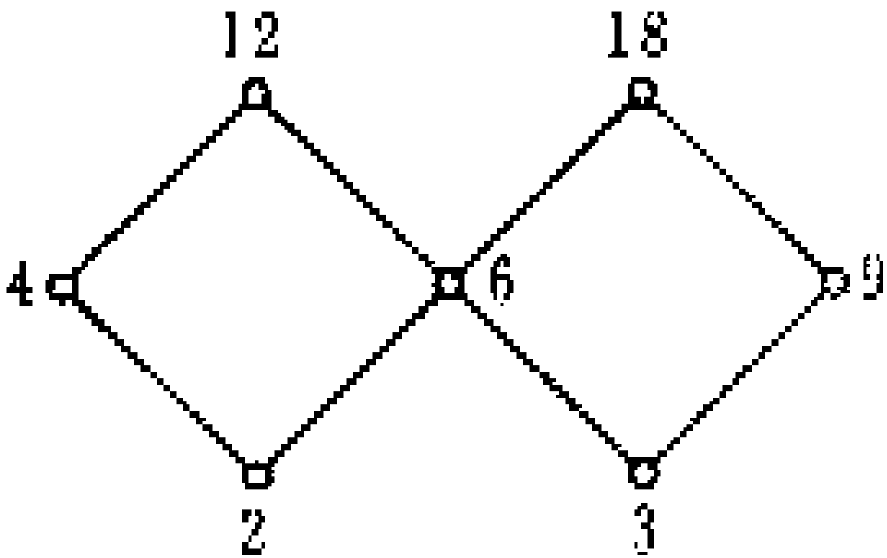
  (1)若$(\exists y)(y\in A\wedge(\forall x)(x\in B\rightarrow x\leq y))$，则称y为B的上界，

  (2)若$(\exists y)(y\in A\wedge(\forall x)(x\in B\rightarrow y\leq x))$，则称y为B的下界，

  (3)若集合C＝{y|y是B的上界}，则C的最小元称为B的上确界或最小上界，

  (4)若集合C＝{y|y是B的下界}，则C的最大元称为B的下确界或最大下界，

- 例8 集合A={2，3，4，6，9，12，18}，A上的整除关系D_A是偏序关系．偏序集<A，D_A>的哈斯图如图所示．



B1＝{2，4}的上界是4和12，上确界是4，下界和下确界是2．B2={4，6，9}没有上下界，没有上下确界．B3={2，3}的上界是6，12，18，上确界是6，没有下界和下确界．

- B的上下界和上下确界可能在B中，可能不在B中，但一定在A中．上界(下界)不一定存在，不一定唯一．上确界(下确界)不一定存在，若存在必唯一．

10.8.4 全序关系和链

- 定义10．8．7 对偏序集<A，≤>，对任意的x，y∈A，若有x≤y或y≤x，则称x和y是可比的.
- 定义10．8．8 对偏序集<A，≤>，如果对任意的x，y∈A，x和y都可比，则称≤为A上的全序关系，或称线序关系，并称<A，≤>为全序集.
- 例9 N上的小于等于关系是全序关系，所以<N，≤>是全序集．N-{0}上的整除关系不是全序关系，对非空集合A，P(A)上的包含关系不是全序关系.

- 定义10．8．9 对偏序集<A，≤>，且B⊆A，进一步

  (1)如果对任意的x，y∈B，x和y都是可比的，则称B为A上的链，B中元素个数称为链的长度．

  (2)如果对任意的x，y∈B，x和y都不是可比的，则称B为A上的反链，B中元素个数称为反链的长度．
- 例10 对例8中的偏序集．{2，4，12}，{3，6，18}，{3，9}，{18}都是链．{4，6，9}，{12，18}，{4，9}都是反链．
- 对全序集<A，≤>，显然A是链．A的任何子集都是链．

- 定理10．8．4 对偏序集<A，≤>，设A中最长链的长度是n，则将A中元素分成不相交的反链，反链个数至少是n.

证明 施归纳于n.

当n=1时，A本身就是一条反链，定理结论成立，(这时≤是恒等关系)假设对于n=k，结论成立．考虑n＝k+1的情况．当A中最长链的长度为k+1时，令M为A中极大元的集合，显然M是一条反链．而且A-M中最长链的长度为k，由归纳假设，可以把A-M分成至少A个不相交的反链，加上反链M，则A可分成至少k＋1条反链．

- 这个定理称为偏序集的分解定理，这是组合学三大存在性定理之一，有广泛的应用.
- 定理10．8．5 对偏序集<A，≤>，若A中元素为mn+1个，则A中或者存在一条长度为，m+1的反链，或者存在一条长度为n+1的链.

10.8.5 良序关系

- 定义10．8．10 对偏序集<A，≤>，如果A的任何非空子集都有最小元，则称≤为良序关系，称<A，≤>为良序集.
- 例11 <N，≤>是全序集，也是良序集．<Z，≤>是全序集，不是良序集．其中Z是整数集．因为Z⊆Z，但是Z没有最小元.

- 定理10．8．6 一个良序集一定是全序集.

证明 设$<A, \leq>$是良序集．对任意的x，y∈A，可构成$\{x, y\}\subseteq A$，它有最小元.该最小元或为x或为y，则$x\leq y$或$y\leq x$.所以，$<A, \leq>$是全序集.

- 定理10．8．7　一个有限的全序集一定是良序集.

证明　设A={a1，a2，…，an}，且<A，≤>是全序集．假设<A，≤>不是良序集，则存在非空子集B⊆A，B中没有最小元．因为B是有限集合，所以存在x，y∈B，使x和y无关系．与全序集矛盾．

- 对一个非良序的集合，可以定义集合上的一个全序关系，使该集合成为良序集．例如，<Z，≤>不是良序集．在Z上定义全序关系R为：对a，b∈Z，若|a|≤|b|，则aRb;若a>0，则-aRa，于是

  0R-1，-1R1，1R-2，-2R2，...这样，Z的最小元是0，Z的子集都有最小元，<Z，R>是良序集．这个定义R的过程称为良序化．

- 定理10．8．8(良序定理) 任意的集合都是可以良序化的.
- 良序定理可以由Zorn引理证明，它们都是选择公理的等价形式．这里不给出证明，
- 设R是实数集合，≤是R上的小于等于关系．显然，<R，≤>是全序集，不是良序集．可以在<R，≤>上定义常用的区间.

- 定义10．8．11　在全序集$<R，\le>$上，对于a，$b \in R$，$a \ne b$，$a \le b$，则

(1)$[a，b]=\{x|x \in R \wedge a \le x \le b)$，称为从a到b的闭区间，

(2)$(a，b)=\{x|x \in R \wedge a \le x \le b \wedge x \ne a \wedge x \ne b)$，称为从a到b的开区间

(3)$[a，b)=\{x|x \in R \wedge a \le x \le b \wedge x \ne b\}$，$(a，b]=\{x|x \in R \wedge a \le x \le b \wedge x \ne a\}$都称为从a到b的半开区间，

(4)还可以定义下列区间

$(-\infty，a]=\{x|x \in R \wedge x \le a\}$，

$(-\infty，a)=\{x|x \in R \wedge x \le a \wedge x \ne a\}$，

$[a，\infty)=\{x|x \in R \wedge a \le x\}$，

$(a，\infty)=\{x|x \in R \wedge a \le x \wedge x \ne a\}$，

$(-\infty，\infty)=R$.

P189：

2， 4， 8， 9， 10， 11(4)， 12(2)， 16， 17(2)， 22， 24， 27， 30， 33， 35， 37， 38， 39(1)， 41(1)， 42， 47

谢谢！