纠错

- 1.1：可满足的命题公式，其否定不是重言的，答案纠正为**A**。
- 2.9：主合取范式纠正为 $\wedge_{1;2}$，原来的答案符号错误。
- 4.8：答案纠正为**不是**。可以给出反例：$P(0)=Q(0)=Q(1)=0, P(1)=1$，$(\exists x)(P(x)\leftrightarrow Q(x))=T, (\exists x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)=F$，原式结果为 F，不是普遍有效。
- 5.1：答案纠正为**D**。具体参考教材75页。前束范式对前束量词没有次序要求。前束范式也是不唯一的。
- 5.2：答案纠正为**C**。
- 5.12：在化简前束范式时，第二行最后否定词内移出现错误，因此后面的解答也不正确。

$$(\forall x)((\exists y P(x,y) \rightarrow \forall y R(y)) \rightarrow (\exists z Q(z) \rightarrow S(x)))$$

$$= (\forall x)(\neg((\neg \exists y P(x,y)) \vee \forall y R(y)) \vee ((\neg \exists z Q(z)) \vee S(x))$$

$$= (\forall x)(((\exists y) P(x,y) \wedge (\exists y) \neg R(y)) \vee (\forall z \neg Q(z)) \vee S(x))$$

$$= (\forall x)(\exists y)(\exists u)(\forall z)((P(x,y) \wedge \neg R(u)) \vee \neg Q(z) \vee S(x))$$

skolem标准型： $(\forall x)(\forall z)((P(x,f(x)) \wedge \neg R(g(x))) \vee \neg Q(z) \vee S(x))$

2021 年秋离散数学复习题 （一）

第一章

B 1.1

（ ）1. 对一个可满足的命题公式，其否定______。

A 不是重言的

B 不是可满足的

C 还是可满足的

D 不是矛盾的

C 1.2

（ ）2. 命题公式¬(P∧Q)→R 具有______个使其为真的指派。

A 2

B 4

C 5

D 3

P	Q	R	
0	0	0	×
0	0	1	
0	1	0	×
0	1	1	
1	0	0	×
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

为假时，

$\neg(P\wedge Q)=T$, $R=F$

P与Q至少一个为F,

1.3 & 1.4

1. 命题公式 P∨((Q∨R)∧S) 的波兰表达式是 ∨P∧∨QRS.
2. 设 P：天下雨，Q：他在室内运动，则命题"除非天下雨，否则他不在室内运动"的形式化为 ¬P→¬Q。

1.5

三.（8'） 请写出一个满足以下要求的命题公式并写出求解过程。

1. 具有P, Q, R三个变元
2. 只有两个联结词（可使用 ¬, ∧, ∨, →, ↔）
3. 恰好具有五个使其为真的指派

P∨Q→R.

C （ ）10. 命题公式（P∧（P→Q））→Q是______

A. 矛盾式

B. 蕴含式

C. 重言式

D. 等值式

$\neg(P\wedge(\neg P\vee Q))\vee Q$

$=\neg(P\wedge Q)\vee Q$

$=(P\wedge Q)\to Q$

$=T$

1.7

B

（ ）11. 下面哪个命题公式是重言式？

A. $(P\to Q)\wedge(Q\to P)$ ×

B. $(P\wedge Q)\to P$ ✓

C. $(\neg P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge\neg Q)$ ×

D. $\neg(P\vee Q)$ ×

1.8

6. $(p\wedge q)\vee(\neg p)$的波兰表达式是：$\vee\wedge pq\neg p$。

1.9 & 1.10

4. 设p,r为真命题，q,s为假命题，则复合命题$(p\to q)\leftrightarrow(\neg r\to s)$的真值为 F 。

T F T F; F ⟷ T = F

5. 设P：“你陪伴我”，Q：“你代我叫车子”，R：“我将出去”。则命题“除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去”可写成命题演算公式：$\neg(P\vee Q)\to\neg R$.

1.11

第二章

2.1

B （ ）3. 下面有______个命题联结词集合是完备集。

{¬, ∧} ✓, {¬, ∨} ✓, {¬, →} ✓, {¬, ↔} ×, {∨, →} ×, {∧, ↔} ×, {∨, ↑} ✓, {↓} ✓

$A\to B=\neg A\vee B$

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

2.2

B（ ）4. 下列推理式正确的是______。

A. $(P\to R)\vee(Q\to R) \Rightarrow (P\vee Q)\to R$　P=T, R=T, Q=F　T　F　×

B. $(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R) \Rightarrow (Q\vee R)$

C. $P\vee Q \Rightarrow P$　×

D. $(P\vee Q)\to(P\vee R) \Rightarrow Q\to R$　P=T, Q=T, R=F 不成立.

2.3

$G = P\vee(\neg Q\wedge R)$

$= P\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$

☆3. 命题公式$G=\neg P\to\neg Q\wedge R$ 的主析取范式是 $\bigvee_{1;4;5;6;7}$。

(注意：请用极小项的简写码表示，极小项按照 P-Q-R 的顺序排列，例如$P\wedge Q\wedge\neg R=m_6$)

2.4

4. $P\to(Q\vee R)\to S$的对偶式为 $(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge S$。

$\neg(\neg P\vee(Q\vee R))\vee S = (P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee S.$

2.5

七、(8') 证明下列推理关系：如果李华在光明中学上学，那么他不是初中生，就是高中生。如果李华是初中生，那么他需要参加中考。如果李华是高中生，那么他经常给外国的友人写信。如果李华经常给外国的友人写信，那么他的英文写作能力很强。李华的英文写作能力不强。从而知：如果李华在光明中学上学，那么他需要参加中考。

P：李华在光明中学上学

Q：李华初中生

R：李华高中生

S：李华参加中考

T：李华给外国友人写信

W：李华英文写作能力强

2.6

$(P\to Q\bar{\vee}R),\ Q\to S,\ R\to T,\ T\to W,\ \neg W \Rightarrow P\to S$

证明：

(1) P　附加前提引入.

(2) $P\to Q\bar{\vee}R$　前提引入.

(3) $Q\bar{\vee}R$　(1)(2)分离

(4) $T\to W$　前提引入.

(5) $\neg W\to\neg T$　(4)置换

(6) $\neg W$　前提引入.

(7) $\neg T$　(5)(6)分离

(8) $R\to T$　前提引入

(9) $\neg T\to\neg R$　(8)置换

(10) $\neg R$　~~[illegible]~~ (7)(9)分离

(11) Q　(3)(10)

(12) $Q\to S$　前提引入

(13) S　(11)(12)分离

(14) $P\to S$　条件证明规则

(B) 12. 下面哪一组命题公式是等值的？

A. $\neg P \wedge \neg Q$，$P \vee Q$ ×

B. $A \to (B \to A), \neg A \to (A \to \neg B)$

$\neg A \vee \neg B \vee A = T$　　$\neg A \vee \neg B \vee A = T$

C. $Q \to (P \vee Q), \neg Q \wedge (P \vee Q)$ ×

D. $\neg A \vee (A \wedge B), B$ ×

2.7

$(P \wedge Q) \vee R$.

(C) 13. 命题公式 $\neg(P \wedge Q) \to R$ 的主析取范式中含极小项的个数为______.

A. 8　　B. 3　　C. 5　　D. 0

2.8

5. 逻辑联结词或非↓可以定义为：$x \downarrow y = \neg(x \vee y)$。将公式 $\underbrace{\neg(x \vee y)}_{(x \downarrow y)} \wedge z$ 转换成只用↓表示的公式 $((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)) \downarrow (z \downarrow z)$.

$\neg P = \neg(P \vee P) = P \downarrow P$

$P \wedge Q = \neg(\neg P \vee \neg Q) = (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)$

2.9

7. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ 的主合取范式是：$V_{1;2}$。

主析取：$V_{0;3}$

主合取 $V_{1;2}$

2.10

六.（8'）任用一种推理方法证明：$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \wedge (\delta \to \neg\gamma) \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \delta)$

$\neg(\alpha \wedge \delta) = \neg\alpha \vee \neg\delta = \alpha \to \neg\delta$.

证明：
(1) α 附加前提引入
(2) $\alpha \to \beta$ 前提引入.
(3) β (1)(2)分离
(4) $\beta \to \gamma$ 前提引入
(5) γ (3)(4)分离.
(6) $\delta \to \neg\gamma$ 前提引入
(7) $\gamma \to \neg\delta$ (6)置换.
(8) $\neg\delta$ (5)(7)分离
(9) $\alpha \to \neg\delta$ 条件证明规则.

2.11

3. 已知命题公式 $G = \neg(P \to Q) \wedge R$，则 G 的主析取范式是 V_5。

2.12

$G = P \wedge \neg Q \wedge R$.

6. $P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$，用或非联结词表示出 $P \to Q$ 为 $((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)$。

0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

主析取= $V_{0;1;3}$

主合取= $V_{1;2;3}$补

$= \Lambda_1$

2.13

7. 已知公式 $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow (Q \rightarrow P))$，其主合取范式为 Λ_1 。

2.14 & 2.15

2. 设命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q)$，$H = P \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$，则 G 与 H 的关系是（ A ）

(A) $G \Rightarrow H$　(B) $H \Rightarrow G$　(C) $G = H$　(D) 以上都不是

$G = P \wedge \neg Q$.

$H = \neg P \vee (\neg Q \vee \neg P)$

$= \neg P \vee \neg Q$.

$G \Rightarrow H$ 成立.

$H \Rightarrow G$ 不成立.

3. 下面 4 个推理定律中，不正确的是（ D ）。

(A) $A \Rightarrow (A \vee B)$ ✓

(B) $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$ ✓

(C) $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ ✓

(D) $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

2.16

5. 设 A, B 都是命题公式，则 $A \rightarrow B$ 为可满足式是 $A \Rightarrow B$ 的（ B ）。

必要

不充分

(A) 充分而非必要条件

(B) 必要而非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分也非必要条件

2.17

三、(7 分) 设命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q) \vee (Q \wedge (\neg P \rightarrow R))$，求 G 的主析取范式。

$G = (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge (P \vee R))$.

$= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge R)$.

$= (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$　$m_5 \vee m_4$

$\vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$　$m_6 \vee m_7$

$\vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$　$m_3 \vee m_7$

$= V_{3;4;5;6;7}$

第四章

4.1

(C) 5. 若个体域为整数集合，下列公式中______不是命题。

A. $(\forall x)(\forall y)(x\cdot y=x)$

B. $(\forall x)(\exists y)(x\cdot y=1)$

C. $(\forall x)(x\cdot y=x)$

D. $(\exists x)(\exists y)(x\cdot y=2)$

4.2

C( ) 6. 设个体域 D={a, b}，则公式 $(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$ 消去量词后可表示为______。

A. $(F(a)\wedge F(b))\vee(G(a)\wedge G(b))$；

B. $(F(a)\vee F(b))\wedge(G(a)\vee G(b))$；

C. $(F(a)\wedge G(a))\vee(F(b)\wedge G(b))$；

D. $(F(a)\vee G(a))\wedge(F(b)\vee G(b))$

4.3

A( ) 7. 令 $P(x,y)$ 表示 $x<y$，当个体域为______时，公式 $(\forall x)(\exists y)P(y,x)$ 不是普遍有效的。

A. 自然数集；

B. 整数集；

C. 有理数集；

D. 实数集

4.4

5. 求公式 $(\forall x)(P\to Q(x))\vee R(a)$ 的真值为____F____，其中 P: 6>3，$Q(x)$: $x\le 3$，$R(x)$: x>3，而 a=3，论域为{−2,3,6}。

R(a)为F .
P为T.

4.5

6. 公式 $(\forall x)\big((P(x)\to Q(x))\wedge(\exists y)R(y)\big)\wedge S(z)$ 的自由变元是__z__，全称量词的辖域为__$((P(x)\to Q(x))\wedge(\exists y)R(y))$__。

4.6

D ( ) 14. 设A(x)：x是人，B(x)：x犯错误，命题"没有人不犯错误"符号化为______

A. $(\forall x)(A(x)\wedge B(x))$

B. $\neg(\exists x)(A(x)\to\neg B(x))$

C. $\neg(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$

D. $\neg(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$

$\neg(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$

$(\forall x)(A(x)\to B(x))$

4.7

8. 设R(x)表示x是实数，E(x, y)表示x=y， 则语句"对所有的实数x，都存在实数y，使得x=y"的符号化为

$(\forall x)(R(x)\to(\exists y)(R(y)\wedge E(x,y)))$

4.8

9. 公式 $(\exists x)(P(x)\leftrightarrow Q(x))\to((\exists x)P(x)\to(\exists x)Q(x))$ __是__(是/不是)普遍有效的；

4.9

10. 公式 $\neg((\forall x)F(x)\to(\exists y)G(y))\wedge(\exists y)G(y)$ __是__(是/不是)不可满足的

4.10

D 1. 设I是如下一个解释：$D=\{a,b\}$，$P(a,a)=1$，$P(a,b)=0$，$P(b,a)=1$，$P(b,b)=0$，则在解释I下真值为1的公式是(　　)。

(A) $\exists x\forall yP(x,y)$　(B) $\forall x\forall yP(x,y)$　(C) $\forall xP(x,x)$　(D) $\forall x\exists yP(x,y)$

$P(a,a)=1$

$P(b,b)=0$

第五章

5.1

B ( ) 8. 下列描述中正确的是______。

A. 不是所有谓词逻辑公式都能化成Skolem标准形

B. 把谓词公式化为前束范式时对于量词的次序排列有要求

C. 每个谓词公式都能化成唯一的前束范式

D. 这些说法都不对

5.2

( ) 9 下面推理形式中正确的是______。其中 p、q 是和 x 无关的命题变项，论域不为空。

A. $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y))$ × $\left\{\begin{array}{l} P(a)=0, P(b)=1 \\ Q(a)=1, Q(b)=0 \end{array}\right.$

B. $(((\forall x)P(x)) \to q \Rightarrow (\forall x)(P(x) \to q)$ ✓

右：$= \forall x(P(x) \to q) = (\exists x P(x)) \to q$.

C. $(\forall x)(p \to Q(x)) \Rightarrow (p \to (\exists x)Q(x))$

左 $= p \to (\forall x)Q(x)$

D. $((\exists x)P(x) \wedge (\exists y)Q(y)) \Rightarrow ((\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ ×

5.3

7. 一个谓词公式的 Skolem 标准形是$(\forall x)(P(x) \vee \neg Q(a,x))$，那么这个公式本身是（填可满足、不可满足或者不确定）：____不确定____。

5.4

四. (8') 任用一种推理方法证明

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \wedge (\exists x)(\neg P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \to \neg R(x)) \Rightarrow (\exists x)(\neg R(x))$

证明：

(1) $(\exists x)(\neg P(x))$ 前提

(2) $\neg P(a)$ 存在量词消去

(3) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ 前提

(4) $P(a) \vee Q(a)$ 全称量词消去

(5) $Q(a)$ (2)(4)

(6) $(\forall x)(Q(x) \to \neg R(x))$ 前提

(7) $Q(a) \to \neg R(a)$ 全称量词消去

(8) $\neg R(a)$ (5)(7)分离

(9) $(\exists x)(\neg R(x))$ 存在量词引入

5.5

六 (8') 求公式$((\forall x)(\exists y)(P(x,y) \to Q(y))) \to (\forall x)(R(x) \to (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))$的前束范式和 Skolem 标准形。

原式 $= ((\forall x)(\exists y)(\neg P(x,y) \vee Q(y))) \to \forall x(\neg R(x) \vee (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))$.

(消去联结词) $= \neg((\forall x)(\exists y)(\neg P(x,y) \vee Q(y))) \vee (\forall x)(\neg R(x) \vee (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))$.

(否定内移) $= ((\exists x)(\forall y)(P(x,y) \wedge \neg Q(y))) \vee (\forall x)(\neg R(x) \vee (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))$.

(量词左移) $= (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \wedge \neg Q(y)) \vee (\forall z)(\exists u)(\forall v)(\neg R(z) \vee L(z,u,v))$.

5.6

（ 换名) $= (\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)\ (P(x,y) \wedge \neg Q(y)) \vee \neg R(z) \vee L(z,u,v)$.

(A) 15. 下列各式哪个不正确？

A. $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$ ×

B. $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$ ✓

C. $(\exists x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$ ✓

D. $(\forall x)(P(x)\vee q)\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\vee q$ ✓

5.7

七. (8') 写出下列公式的前束范式

$(\exists x)(\neg((\exists y)P(x,y))\to((\exists z)Q(z)\to R(x)))$

$= (\exists x)((\exists y)P(x,y)\vee(\neg(\exists z)Q(z)\vee R(x)))$.

$= (\exists x)((\exists y)P(x,y)\vee((\forall z)(\neg Q(z)\vee R(x))))$.

$= (\exists x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y)\vee\neg Q(z)\vee R(x))$.

5.8

八. (10') 任用一种推理方法证明：

$(\exists x)(R(x)\wedge W(x)),(\forall x)(P(x)\to Q(x)),(\forall x)(R(x)\to\neg Q(x))\Rightarrow(\exists x)(W(x)\wedge\neg P(x))$

证明.
(1) $(\exists x)(R(x)\wedge W(x))$. 前提引入.
(2) $R(a)\wedge W(a)$ 存在量词消去
(3) $R(a)$ (2)
(4) $W(a)$ (2).
(5) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))$ 前提引入.
(6) $P(a)\to Q(a)$. 全称量词消去
(7) $(\forall x)(R(x)\to\neg Q(x))$ 前提引入
(8) $R(a)\to\neg Q(a)$ 全称量词消去
(9) $\neg Q(a)$ (3)(8).
(10) $\neg Q(a)\to\neg P(a)$ (6) 置换
(11) $\neg P(a)$ (9)(10)
(12) $W(a)\wedge\neg P(a)$ (4)(11)
(13) $(\exists x)(W(x)\wedge\neg P(x))$.

5.9 & 5.10

$\neg(\forall x P(x))\vee(\exists x)(Q x)=((\exists x)\neg P(x))\vee((\exists x)Q(x))$.

1. 设一阶逻辑公式$G=\forall xP(x)\to\exists xQ(x)$，则$G$的前束范式是 $\exists x(\neg P(x)\vee Q(x))$

2. 设谓词的论域为$\{a,b\}$，将表达式$\forall xR(x)\to\exists xS(x)$中量词消去，写成与之对应的命题公式是 $\neg R(a)\vee\neg R(b)\vee S(a)\vee S(b)$

$((\exists x)\neg R(x))\vee(\exists x)S(x)$.

5.11

4. 下列等值式不正确的是（ C ）。

(A) $\neg(\forall x)A = (\exists x)\neg A$ ✓

(B) $(\forall x)(B \to A(x)) = B \to (\forall x)A(x)$ ✓

(C) $(\exists x)(A(x) \cancel{\wedge} B(x)) = (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$

(D) $(\forall x)(\forall y)(A(x) \to B(y)) = (\exists x)A(x) \to (\forall y)B(y)$ 右 $= \neg(\exists x A(x)) \vee \forall y B(y)$

$= \forall x(\neg A(x)) \vee \forall y B(y)$.

5.12

四、(8 分) 写出 $\forall x((\exists y P(x,y) \to \forall y R(y)) \to (\exists z Q(z) \to S(x)))$ 的 Skolem 范式（仅保留全称量词的前束形）。

原式 $= (\forall x)(\neg(\neg(\exists y)P(x,y) \vee (\forall y)R(y)) \vee (\neg(\exists z)Q(z) \vee S(x)))$

$= (\forall x)(((\exists y)P(x,y) \wedge (\exists y)\neg R(y)) \vee ((\forall z)\neg Q(z) \wedge \neg S(x)))$.

$= (\forall x)(\exists y)(\exists u)(\forall z)((P(x,y) \wedge \neg R(u)) \vee (\neg Q(z) \wedge \neg S(x)))$.

$\downarrow$

$(\forall x)(\forall z)((P(x, f(x)) \wedge \neg R(g(x))) \vee (\neg Q(z) \wedge \neg S(x)))$.