算法的难点是步骤 (3)。它需要找 $d(v_i)$ 条 P_{st} 道路，这些道路长度的总和最小。若 Dijkstra 算法一条一条地寻找最短 P_{st} 道路，则计算量比较大，同时结果并不一定最佳。果把 G 中每边的权视为通过该边的费用，而容量为 ∞，对始发点 v_s，(v_s, v_i) 形式的只有一条，它的费用为 0，容量为 $d'(i)$；同样对超收点 v_t，每条边 (v_j, v_i) 的费用为 0，量为 $|d'(j)|$，这样步骤 (3) 就可以转化为在 G' 上求从 v_s 到 v_t 传送 $\sum d'(i)$ 个单位量最小费用流问题，如式 (2-3) 所示。关于最小费用流将在第 6 章讨论。

习 题 2

1.【★☆☆☆】设简单图 G 有 k 个连通支，证明：

$$m \leqslant \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k)$$

2.【★☆☆☆】证明：G 和 $\overline{G}$ 至少有一个是连通图。

3.【★☆☆☆】证明：若连通图的最长道路不唯一，则它们必定相交。

4.【★★☆☆】在简单图中，证明：若 $n \geqslant 4$ 且 $m \geqslant 2n-3$，则 G 中含有带弦的回路

5.【★★★☆】设 G 是不存在三角形的简单图，证明：

(1) $\sum d^2(v_i) \leqslant mn$。

(2) $m \leqslant \dfrac{n^2}{4}$。

6.【★☆☆☆】证明图 2.39 中没有包含奇数条边的回路。

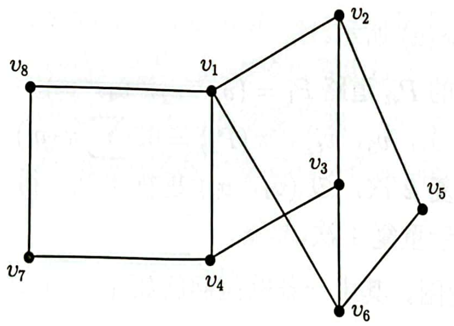


图 2.39

7.【★★☆☆】证明：对无向简单图 G，若 $|E(G)| \geqslant |V(G)|$，则其一定存在一条回路

8.【★★☆☆】请对 Warshall 算法进行适当修改，以便在计算道路矩阵后，可以查知任意两顶点间具体的路径。

9.【★☆☆☆】给出图 2.40 的邻接矩阵，用 Warshall 算法计算出其道路矩阵，并写出计算过程。

10.【★☆☆☆】分别使用 DFS 算法和 BFS 算法，从 v_1 开始遍历图 2.41。使用 BFS 算法时写出每个集合 A_i，使用 DFS 算法时写出顶点的访问顺序。

11.【★☆☆☆】房间的俯视图如图 2.42，问是否存在一条路过各门一次？试说明理由

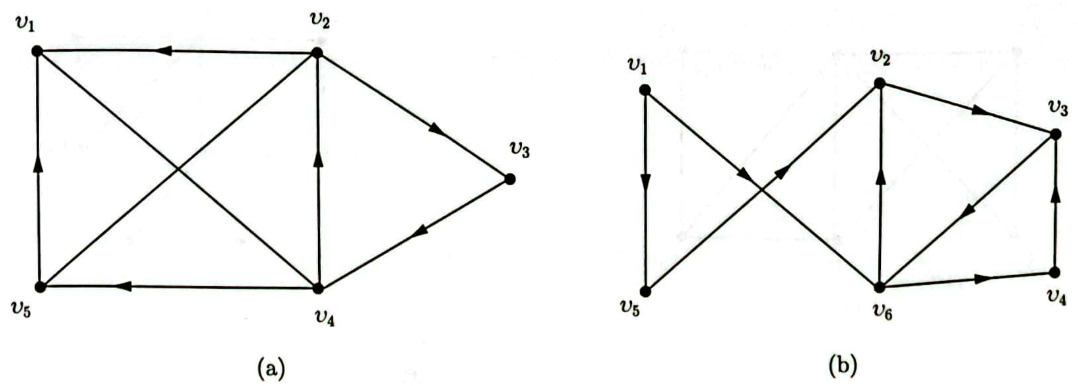


图　2.40

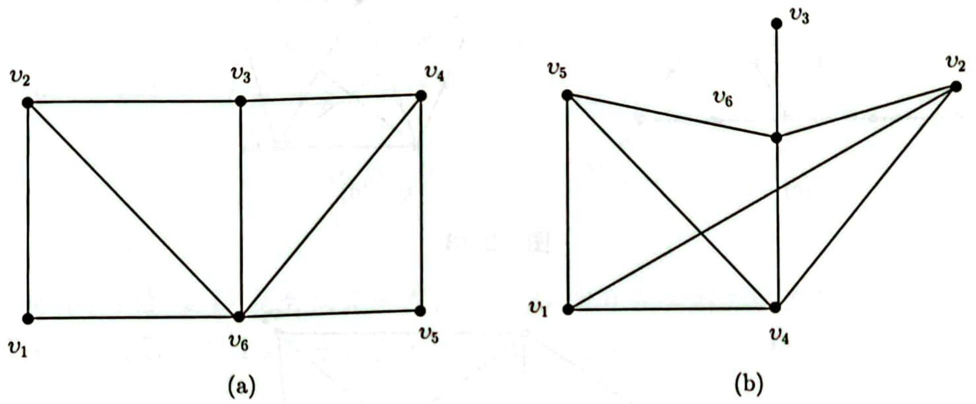


图　2.41

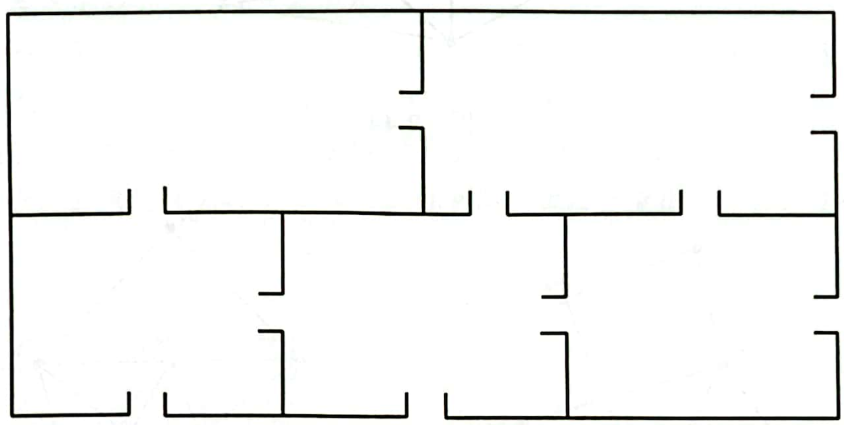


图　2.42

12.【★☆☆☆】判断图 2.43 中的图形，至少需要几笔才能画出，并写出具体方案。

13.【★★☆☆】如图 2.44 所示，A 从顶点 v_2 出发，B 从顶点 v_1 出发。要求两人遍历完所有边至少一次后到达终点 v_3，谁到达更快谁就胜利。假设两人经过同一条边的时间相同，请问谁有必胜策略？

14.【★★☆☆】请为图 2.45 中每条边指定一个方向，使得每个点的正度等于负度。

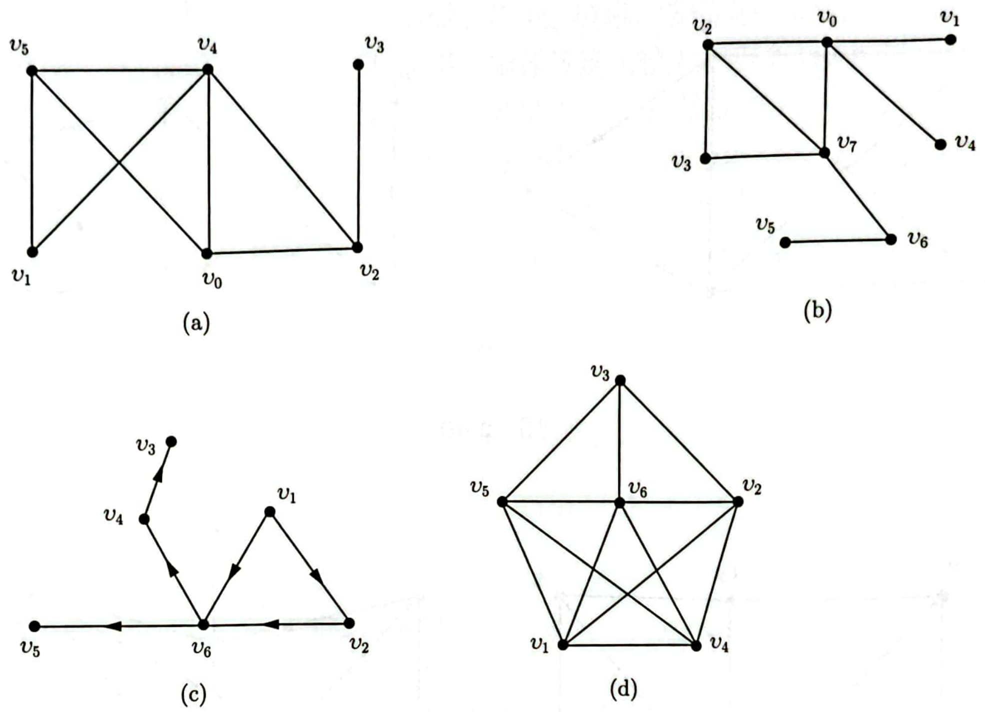


图 2.43

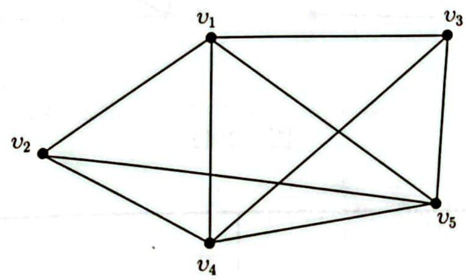


图 2.44

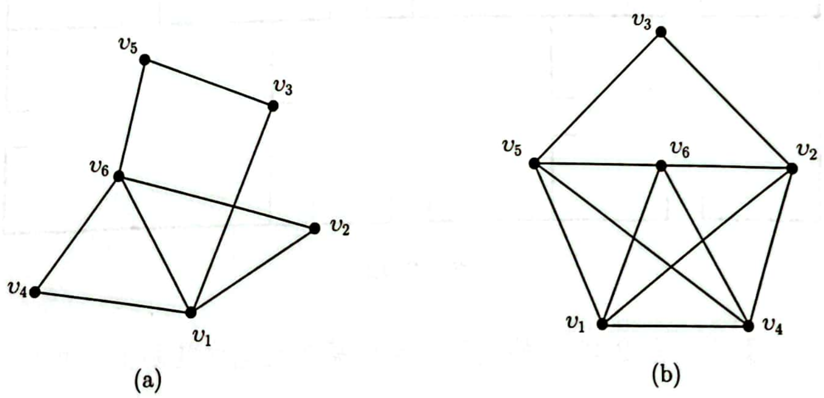
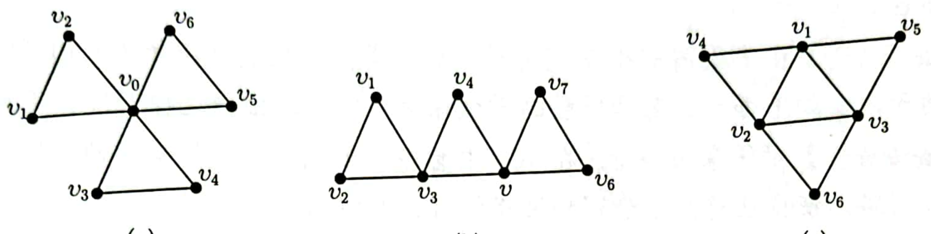


图 2.45

15.【★★☆☆】令 G 是一个有奇数个顶点的简单无向图。证明：如果 G 可以被一笔画出，则对于任意的 k，一定存在某种加边方案，使得给图 G 添加 k 条边之后还可以被一

笔画出。

16.【★☆☆☆】求图 2.46 中欧拉回路数量（两个回路不同，当且仅当以 $v_1 \leftrightarrow v_2$ 这条边为开始得到的边序列不同）。



(a)　(b)　(c)

图 2.46

17.【★☆☆☆】设 G 有 H 道路，证明对任意 $S \subset V(G)$，$G-S$ 的连通支数 $t \leqslant |S|+1$。

18.【★☆☆☆】设 G 是 $n \geqslant 3$ 的简单图，证明：若

$$m \geqslant \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$$

则 G 存在 H 回路。

19.【★★☆☆】设 G 是有向完全图，证明 G 中存在有向的哈密顿道路。

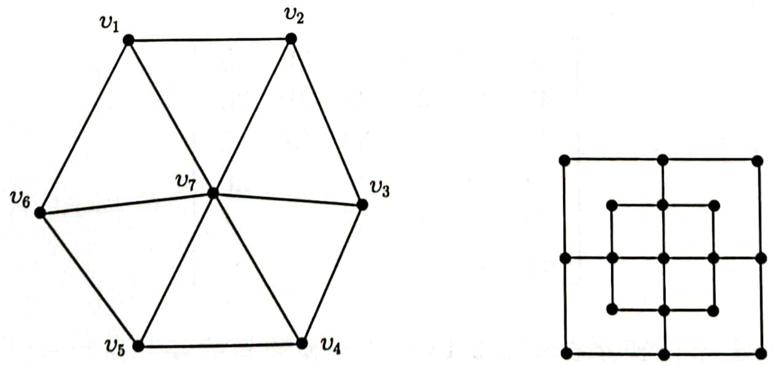
20.【★☆☆☆】在例 2.4.5 中，若 $n \geqslant 4$，证明这 n 个人一定可以围成一圈，使相邻者互相认识。

21.【★★☆☆】设 G 是有 n 个顶点的简单图，其最小度 $\delta(G) \geqslant \dfrac{n+q}{2}$，证明 G 中存在包含任意 q 条互不相邻边的哈密顿回路。

22.【★☆☆☆】对一个 $3\times3\times3$ 的立方体，能否从一个角上开始，通过所有 27 个 $1\times1\times1$ 的小立方块各 1 次，最后达到中心？试说明理由。

23.【★★☆☆】编程并搜索出图 2.14 的全部不同的 H 回路。

24.【★☆☆☆】判断图 2.47 是否有哈密顿回路。如果有请找出一条，没有请直接判断没有。



(a)　(b)

图 2.47

25.【★☆☆☆】令 $G=(V,E)$ 为二分图，$V(G)$ 可以被划分为子集 X、Y 使得所有的 $e=(u,v)\in(G)$，u、v 都分别属于 X 和 Y。

证明：如果 $|X|\neq|Y|$，那么 G 一定没有哈密顿回路；如果 $|X|-|Y|\geqslant 1$，则一定没有哈密顿路径。

26.【★☆☆☆】在 7 天内安排 7 门考试，要使得同一位教师所教的两门课考试不安排在连续的两天内。如果每一位老师任教的考试课最多四门，证明这种安排一定是可行的。

27.【★★★☆】对任意 $n\geqslant 3$，在 K_n 中有多少个无公共边的哈密顿回路（即选出最多的哈密顿回路，使得任意两个哈密顿回路没有公共边）？

28.【★★☆☆】在一个 $m\times n$ 大小的国际象棋棋盘上有一个“马”。这个“马”每次可以按照国际象棋的规则进行移动（当前在 (x,y)，则可以移动到 $(x\pm 2,y\pm 1)$ 或 $(x\pm 1,y\pm 2)$ 中的一个）。

证明：当 m、n 均为奇数时，“马”不能够遍历所有的格子恰好一次并回到出发点。

29.【★☆☆☆】将图 G 的顶点分成若干个集合 $X_1,X_2,\cdots,X_k$。每个点只能属于恰好一个集合。对任意 v_i、v_j，如果其属于不同的集合，则在它们之间连一条边。

证明：若对任意集合 X_i 有 $|X_i|\leqslant\dfrac{n}{2}$，则原图一定有哈密顿回路。

30.【★☆☆☆】已知 G 的权矩阵，用分支定界法求其旅行商问题的解。

$$\begin{bmatrix} 0 & 42 & 33 & 52 & 29 \\ 42 & 0 & 26 & 38 & 49 \\ 33 & 26 & 0 & 34 & 27 \\ 52 & 38 & 34 & 0 & 35 \\ 29 & 49 & 27 & 35 & 0 \end{bmatrix}$$

31.【★☆☆☆】一个装置从原点出发，要分别在坐标 $(2,5)$、$(9,3)$、$(8,9)$、$(6,6$ 停留，然后返回原点。设该装置只能沿 X 轴和 Y 轴行进，求最短的行进路线。

32.【★★☆☆】编写用分支定界法求旅行商问题的程序。

33.【★★☆☆】用近似算法求权矩阵如下的旅行商问题，并与程序运行结果比较。

$$\begin{bmatrix} \times & 42 & 33 & 52 & 29 & 45 \\ 42 & \times & 26 & 38 & 49 & 36 \\ 33 & 26 & \times & 34 & 27 & 43 \\ 52 & 38 & 34 & \times & 35 & 30 \\ 29 & 49 & 27 & 35 & \times & 41 \\ 45 & 36 & 43 & 30 & 41 & \times \end{bmatrix}$$

34.【★☆☆☆】用便宜算法求图 2.48 中旅行商问题的解，并写出回路 T 中顶点的扩展过程。

35.【★☆☆☆】用分支定界法计算图 2.49 的旅行商问题的解。

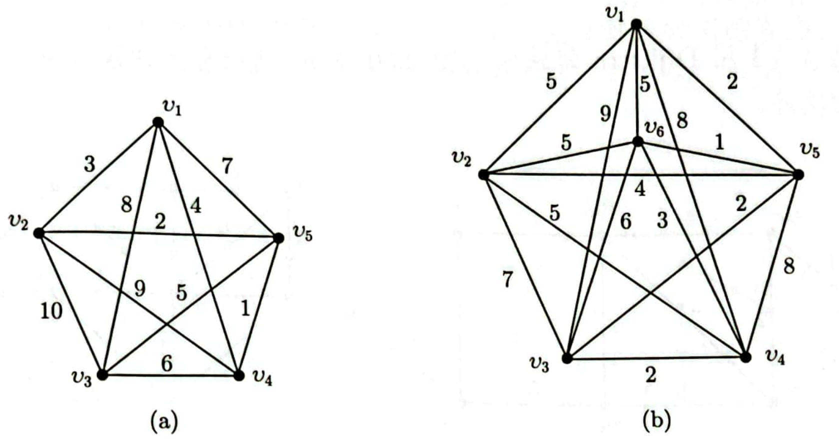


图　2.48

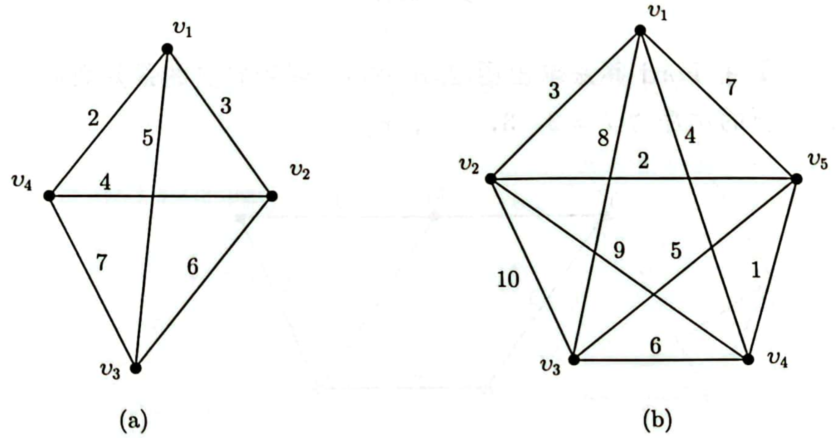


图　2.49

36.【★★☆☆】给出无向带权图 G，求访问每个点至少一次的最短回路的问题，可以归约为旅行商问题。转化方法如下：构造新图 G'，其中顶点与 G 中相同，但是对任意两点 (u, v) 间有边，权值为 u 到 v 的最短路径长度。则求 G' 的旅行商问题即可求出 G 中的解。证明上述方法的正确性。

37.【★☆☆☆】给出一个 n 个点的无向完全图 G，(v_i, v_j) 间有且仅有一条边权为"i 和 j 的最大公因数 (i, j)"的边。求该图旅行商问题的解。

38.【★★☆☆】某设备今后五年的价格预测分别是 (5，5，6，7，8)，若该设备连续使用，其第 $i(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 年的维修费分别是 (1，2，3，5，6)。某单位今年购进一台，问如何使用可使 5 年里总开支最小？

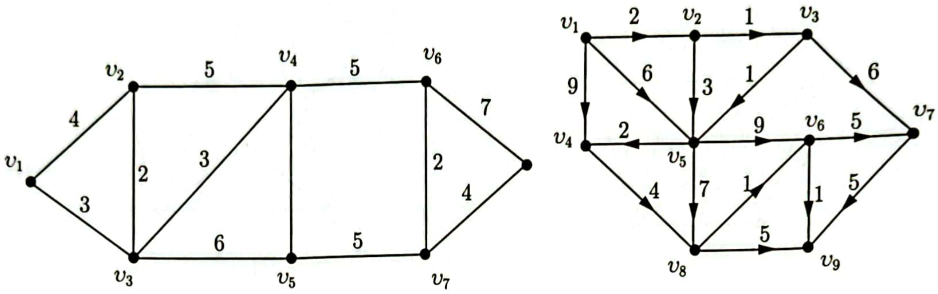
39.【★★☆☆】试编写无负长回路图的最短路径程序。

40.【★★☆☆】给出边权为正的无向连通图 $G = (V, E)$，并定义两点之间的距离 $d(v_i, v_j)$ 为两点之间最长的初级道路的长度。设 G 中距离最大的两个点为 s、t，证明：对于任意 $v \in V$，有 $2 \times \max_{u \in V} d(u, v) \geqslant d(s, t)$。

41.【★★★☆】对 Warshall 算法做适当的修改，使得其可以计算任意两点之间的最短

路径长度。

42.【★☆☆☆】用 Dijkstra 算法求出图 2.50 中 v_1 到所有点的最短路径，并写出 $\overline{S}$ 中顶点被删去的次序。



(a) (b)

图 2.50

43.【★☆☆☆】用 Ford 算法求出图 2.51 中 v_1 到所有点的最短路径，并写出迭代数（我们规定，更新的次序为 $i=2, 3, \cdots, n$）。

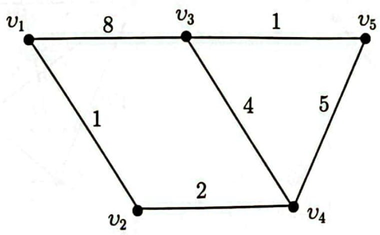


图 2.51

44.【★★☆☆】扩展计算最短路径使用的 Dijkstra 算法，使得其能够求出两点之间具体的最短路径。

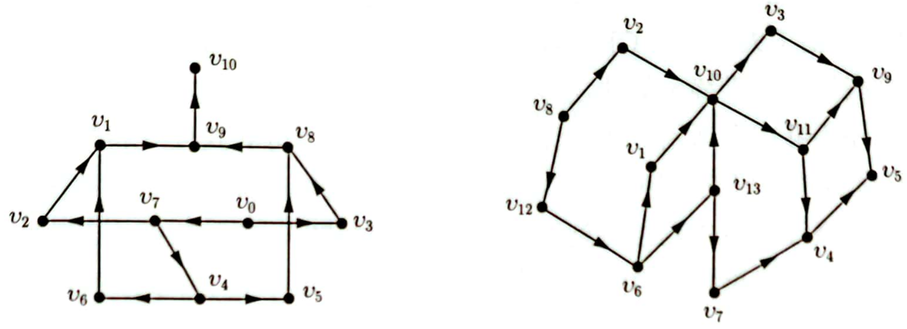
45.【★☆☆☆】一项工程，其各工序所需时间与约束关系如表 2.2，试用 PT 图与 PER 图求其关键路径。并求工序 3，5，10 的允许延误时间如表 2.2 所示。

表 2.2

工 序 号	时 间	前 序 工 序
1	5	
2	8	1，3
3	3	1
4	6	3
5	10	2，3
6	4	2，3
7	8	3
8	2	6，7
9	4	5，8
10	5	6，7

46.【★★☆☆】编写求 PERT 图关键路径及工序允许延误时间的程序。

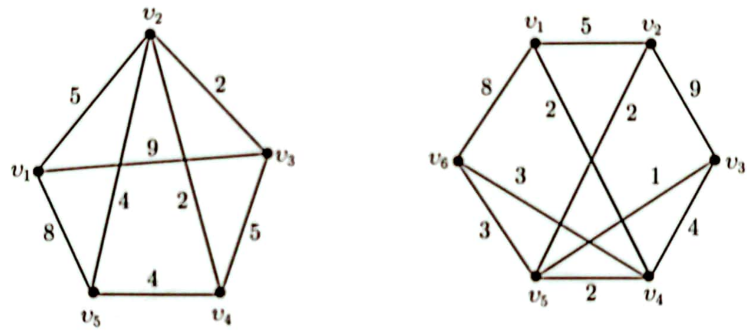
47.【★☆☆☆】给图 2.52 的顶点重新标号为 v_1'，v_2'，$\cdots$，v_n'，使得对任意的边 $(v_i', v_j') \in E$ 都有 $i < j$。



(a) (b)

图 2.52

48.【★☆☆☆】分别求图 2.53(a) 和图 2.53(b) 的中国邮路。



(a) (b)

图 2.53

☞图论知识

中国邮路问题

中国学者管梅谷 (见图 2.54) 在邮局线性规划中，发现了这个问题：一个邮递员每次上班，要走遍他负责送信的路段，然后回到邮局，怎样走才能使所走的路程最短。经过抽象，他把这个问题归结为：在平面上给出一个连通的线图，要求将这个线图从某一点开始一笔画出（允许重复)，并且最后仍回到起点，怎样画才能使得重复线路最短。这个问题在 1960 年被管梅谷教授首次提出并给出了解法——“奇偶点图上作业法”，被国际上称为“中国邮路问题”(Chinese Postman Problem，CPP)。

图 2.54