10.【★★☆☆】证明：9 个人中若非至少有 4 个人互相认识，则至少有 3 个人互相不认识。

11.【★☆☆☆】设 G 是含有 n 个顶点、m 条边的无向图，v 是 G 中一个度数为 k 的顶点，e 是 G 中一条边。写出 $G-e$、$G-v$ 的顶点数与边数。

12.【★☆☆☆】举例说明顶点度的非增序列相同的两个图可能不同构。

13.【★★☆☆】求有 4 个顶点的简单图个数，其中相互同构的图算作同一个。

14.【★★☆☆】判断带有下列邻接矩阵的简单图是否同构。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

15.【★★☆☆】证明：若图 G_1 与 G_2 同构，则其邻接矩阵 $M(G_1)$ 与 $M(G_2)$ 的秩相等。

16.【★☆☆☆】写出图 1.25(a) 的邻接矩阵、关联矩阵、边列表及正向表。

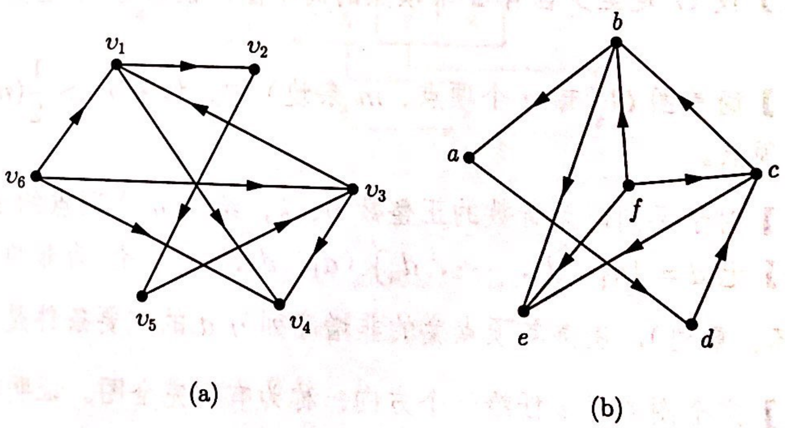

图 1.25

17.【★☆☆☆】判断图 1.25 是否同构。

18.【★☆☆☆】有向图 D 和它的逆图 D' 的邻接矩阵有什么关系？

19.【★★☆☆】记矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为图 G 的邻接矩阵。尝试说明 $\boldsymbol{A}^k$ 的 i 行 j 列元素 a_{ij} 表示什么。

20.【★★☆☆】无向图的关联矩阵与其转置之积可以表示什么？

21.【★☆☆☆】表示一个有 n 个顶点、m 条边的非赋权图需要多少存储空间？其中分别利用：

(1) 邻接矩阵；
(2) 关联矩阵；
(3) 边列表；
(4) 正向表。

22.【★★★☆】试编写有向图 G 的邻接矩阵与关联矩阵、邻接矩阵与正向表、关联矩阵与边列表之间互相转换的程序。

☞图论知识

图论的起源与发展

图论是一门比较古老的数学分支，普遍认为其源于十分有名的哥尼斯堡 (Konigsberg) 七桥问题，哥尼斯堡位于如今的俄罗斯飞地加里宁格勒州，历史上它曾经属于普鲁士公国，闻名于世的七桥问题也诞生在这个时期。问题的背景相当简单，是一个经典的“一笔画”问题，当时有许多人对这个问题感到好奇并尝试将其解决，但始终无果，这个问题最终被当时访问哥尼斯堡的大数学家欧拉 (Euler，见图 1.26) 解决。1736 年，欧拉向圣彼得堡科学院提交了论文《哥尼斯堡七桥》，在彻底解决了这个问题的同时开创了一个对后世产生了深远影响的数学学科——图论 (Graph Theory)，这一学科对后来的数学研究乃至计算机科学的发展产生了巨大的作用。

图　1.26

随后的两百年间，图论都处在较为缓慢的萌芽阶段，研究基本停留在解决一些游戏问题。这其中最著名的是 Francis Guthrie 于 1852 年提出的四色猜想（Four color theorem），这一问题在之后的一百余年中一直没有得到证明。这一阶段，图论较为重要的应用成果包括：1845 年，物理学家 Gustav Robert Kirchhoff 利用图论中的树结构提出了 Kirchhoff 电路定律，用以计算电路中的电压和电流；1875 年，Arthur Cayley 在化学领域利用树状图解决了饱和氢化物同分异构体数目的计算问题等。

1936 年，匈牙利数学家 Dénes König 总结了 200 年来图论的发展历程和主要成果，出版了图论的第一部专著——《有限图和无限图的理论》，标志着图论成为一门独立、系统的数学学科。随后的半个世纪以来，随着计算机科学的进步，图论更是以惊人的速度向前发展，产生了许多新的分支，如拓扑图论、代数图论、算法图论、应用图论、网络图论、超图理论、随机图论等。它们已广泛应用到物理学、化学、通信、计算机科学、运筹学、生物遗传学、心理学、社会学、经济学、人类学和语言学等领域，成为学习研究计算机科学、通信信息科学、电子电路等学科的必不可少的重要数学工具。

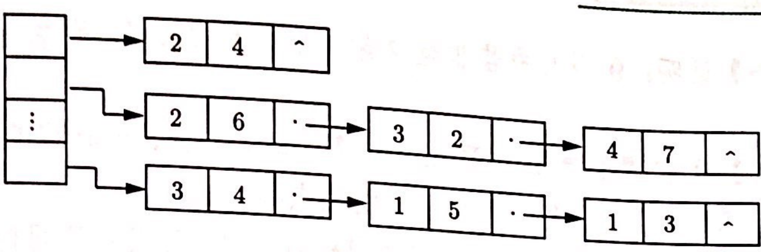

图 1.24

其中，$Q(i)$ 存放顶点 v_i 的第一个直接后继表顶点的地址指针。邻接表的特点是使用灵活，例如要从图 G 中删去某条边时，只要摘除对应的表顶点就可以实现；若要增加某条边，也只需增加一个表顶点，而不需要进行大的变动。

边列表、正向表和邻接表等都能表示重边，也能表示自环。也就是说，它们都能唯一表示任意一个图，而且也都只占据较小的存储空间。邻接矩阵、关联矩阵、边列表、正向表、逆向表之间都可以互相转换。为了直观起见，本书主要采用邻接矩阵和关联矩阵表示图 G，在描述某些算法时，有时也采用正向表等形式的数据结构。

习 题 1

1.【★☆☆☆】① 求有 n 个顶点、m 条边的简单图个数。

2.【★☆☆☆】证明：在 9 座工厂之间，不可能每座工厂都只与其他 3 座工厂有业务联系，也不可能只有 4 座工厂与偶数个工厂有业务联系。

3.【★☆☆☆】设 G 是至少含有 2 个顶点的简单图，证明 G 中至少有 2 个顶点度数相同。

4.【★★☆☆】简单图 G（有 n 个顶点、m 条边）中，如果 $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，证明 G 不存在孤立顶点。

5.【★★☆☆】对于不同时为奇数的正整数 n、k，给出 n 个顶点的 k-正则图的构造。

6.【★☆☆☆】记 $d=\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$（$d_1, d_2, \cdots, d_n$ 为非负整数）。证明存在一个图（可含自环、重边），使得其顶点度的非增序列为 d 的充要条件是 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数。

7.【★★☆☆】完全图的每边任给一个方向，称为有向完全图。证明在有向完全图中

$$\sum_{v_i \in V}\left(d^{+}(v_i)\right)^2=\sum_{v_i \in V}\left(d^{-}(v_i)\right)^2$$

成立。

8.【★★☆☆】3 个量杯的容量分别是 8 升、5 升和 3 升，现 8 升的量杯装满了水，问怎样才能把水分成 2 个 4 升，画出相应的图。

9.【★★☆☆】6 个人围成圆形就座，每个人恰好只与相邻者不认识，是否可以重新入座，使每个人都与邻座认识？

---

① 习题中用实心五星代表习题难度，供读者参考，星数越多，难度越高，最高为四星。