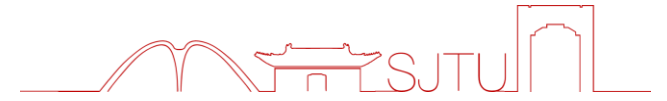




上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY



离散数学 第二次助教课

蔡子诺

2023年12月12日

饮水思源 · 爱国荣校



题目



1.2, 3, 4, 6, 8, 10

2.4, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17

4.1, 2, 5, 6, 7, 8, 9

5.5, 6, 8



第一章 命题逻辑的基本概念



☉ 考点一：命题的判断

□ 非真即假的陈述句

☉ 考点二：命题联结词及真值表

☉ 考点三：重言式、可满足式、矛盾式

☉ 考点四：代入规则

□ 原子命题、全部代换

☉ 考点五：命题形式化

□ 易错点：异或的形式化

☉ 考点六：(逆)波兰表达式





C, 真值表法

() 2. 命题公式 $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$ 具有_____个使其为真的指派。

A 2

B 4

C 5

D 3

方法1: 为假的指派 $\rightarrow R$ 为F, (P and Q)为F

方法2: 真值表法



第一章



1.3 命题公式 $p \vee ((q \vee r) \wedge s)$ 的波兰表达式为 $\vee p \wedge \vee q r s$

1.8 $(p \wedge q) \vee (\neg p)$ 的波兰表达式是: $\vee \wedge p q \neg p$

1.4 设P: 天下雨, Q: 他在室内运动, 则命题“除非天下雨, 否则他不在室内运动”的形式化为

$\neg p \rightarrow \neg q$

1.10 设P: “你陪伴我”, Q: “你代我叫车子”, R: “我将出去”。则命题: “除非你陪伴我或代我叫车子, 否则我将不出去”的形式化为: $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg r$

P	Q	结果
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

1.6 命题公式 $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$ 是 重言式





第二章 命题逻辑的等值和推理演算



① 考点一：等值公式 (18条)

② 考点二：联结词的完备集

③ 考点三：对偶式

④ 考点四：范式、主范式

⑤ 考点五：推理公式

⑥ 考点六：推理演算

□ 条件证明规则

□ 归结法





(B) 3. 下面有_____个命题联结词集合是完备集。

$\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\neg, \leftrightarrow\}$, $\{\vee, \rightarrow\}$, $\{\wedge, \leftrightarrow\}$, $\{\vee, \uparrow\}$, $\{\downarrow\}$

- A. 4
- B. 5
- C. 6
- D. 7

最小完备集的个数为4个

不完备集

- $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 不是完备的
因为 \neg 不能仅由该集合的联结词表达出
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$ 不是完备的
- $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 的任何子集都是不完备的
 $\{\neg, \leftrightarrow\}$ 的任何子集也是不完备的
(如果一个联结词的集合是不完备的, 那么它的任何子集都是不完备的)
- $\{\vee, \wedge\}$ 不是完备的



第二章 联结词的完备集



2.8

逻辑联结词或非 \downarrow 可以定义为： $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$ 。将公式 $\neg(x \vee y) \wedge z$ 转换成只用 \downarrow 表示的公式_____

$$\underline{((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)) \downarrow (z \downarrow z)}$$

2.12

$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$ ，用或非联结词表示出 $P \rightarrow Q$ 为_____。

$$\underline{((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow P \downarrow Q)}$$



第二章 对偶式



2.4

4. $P \rightarrow Q \vee R \rightarrow S$ 的对偶式为 $(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge S$

注意运算顺序和括号的添加



第二章 主范式 (填空题)



2.7 C () 13. 命题公式 $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$ 的主析取范式中含极小项的个数为_____

A. 8 B. 3 C. 5 D. 0

2.13 7. 已知公式 $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow (Q \rightarrow P))$, 其主合取范式为_____ M_1 _____。

P	Q	结果
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T



第二章：主范式



2.17 设命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q) \vee (Q \wedge (\neg P \rightarrow R))$ ，求 G 的主析取范式。

1. 消去联结词
2. 否定词内移
3. 使用分配律
4. 添加缺失项

$$\begin{aligned} G &= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge (\neg P \vee R)) \\ &= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge R) \\ &= (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\ &\quad \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \\ &\quad \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \\ &= \bigvee_{3,4,5,6,7} \end{aligned}$$

主合取范式: $\bigwedge_{7,6,5}$



第二章 推理公式



2.14

2. 设命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q)$, $H = P \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$, 则 G 与 H 的关系是 (A)

(A) $G \Rightarrow H$

(B) $H \Rightarrow G$

(C) $G = H$

(D) 以上都不是

2.15

3. 下面 4 个推理定律中, 不正确的是 (D)。

(A) $A \Rightarrow (A \vee B)$

(B) $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$

(C) $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$

(D) $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

$G = P \wedge \neg Q.$
 $H = \neg P \vee (\neg Q \vee \neg P)$
 $= \neg P \vee \neg Q.$
 $G \Rightarrow H$ 成立.
 $H \Rightarrow G$ 不成立.



第二章：自然语句形式化+推理演算

七. (8') 证明下列推理关系：如果李华在光明中学上学，那么他不是初中生，就是高中生。如果李华是初中生，那么他需要参加中考。如果李华是高中生，那么他经常给外国的友人写信。如果李华经常给外国的友人写信，那么他的英文写作能力很强。李华的英文写作能力不强。从而知：如果李华在光明中学上学，那么他需要参加中考。

自然语句形式化

P : 李华在光明中学上学
 Q : 李华初中生
 R : 李华高中生
 S : 李华参加中考
 T : 李华给外国友人写信
 W : 李华英文写作能力强

$(P \rightarrow Q \vee R), Q \rightarrow S, R \rightarrow T, T \rightarrow W, \neg W \Rightarrow P \rightarrow S$

(1) P 附加前提引入.
 (2) $P \rightarrow Q \vee R$ 前提引入.
 (3) $Q \vee R$ (1)(2)分离
 (4) $T \rightarrow W$ 前提引入.
 (5) $\neg W \rightarrow \neg T$ (4)置换
 (6) $\neg W$ 前提引入.
 (7) $\neg T$ (5)(6)分离
 (8) $R \rightarrow T$ 前提引入.
 (9) $\neg T \rightarrow \neg R$ (8)置换
 (10) $\neg R$ (7)(9)分离
 (11) Q (3)(10)
 (12) $Q \rightarrow S$ 前提引入
 (13) S (10)(12)分离
 (14) $P \rightarrow S$ 条件证明规则





第二章 推理演算



六. (8') 任用一种推理方法证明: $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \wedge (\delta \rightarrow \neg \gamma) \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \delta)$

$$\neg(\alpha \wedge \delta) = \neg\alpha \vee \neg\delta = \alpha \rightarrow \neg\delta.$$

证明:

(1)	α	附加前提引入
(2)	$\alpha \rightarrow \beta$	前提引入
(3)	β	(1)(2)分离
(4)	$\beta \rightarrow \gamma$	前提引入
(5)	γ	(3)(4)分离
(6)	$\delta \rightarrow \neg\gamma$	前提引入
(7)	$\gamma \rightarrow \neg\delta$	(6)置换

(8) $\neg\delta$ (5)(7)分离

(9) $\alpha \rightarrow \neg\delta$ 条件证明规则.



第四章 谓词逻辑的基本概念



① 考点一：基本概念（谓词、个体词、函数、量词、自由变元与约束变元、辖域）

② 考点二：合式公式的判断

③ 考点三：自然语句形式化

□所有的有理数都是实数；

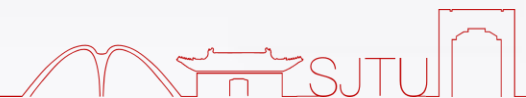
□有的实数是有理数；

□没有有理数是无理数；

□有的实数不是有理数

④ 考点四：有限域下的表示

⑤ 考点五：普遍有效性的判定





第四章 基本概念



4.5

6. 公式 $(\forall x) ((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\exists y)R(y)) \wedge S(z)$ 的自由变元是 z, 全称量词的辖域为 $((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\exists y)R(y))$ 。

4.1

() 5. 若个体域为整数集合, 下列公式中 C 不是命题。

A. $(\forall x) (\forall y) (x \cdot y = x)$

B. $(\forall x) (\exists y) (x \cdot y = 1)$

C. $(\forall x) (x \cdot y = x)$

D. $(\exists x) (\exists y) (x \cdot y = 2)$



4.2

(C) 6. 设个体域 $D = \{a, b\}$, 则公式 $(\exists x) (F(x) \wedge G(x))$ 消去量词后可表示为_____。

A. $(F(a) \wedge F(b)) \vee (G(a) \wedge G(b));$

B. $(F(a) \vee F(b)) \wedge (G(a) \vee G(b));$

C. $(F(a) \wedge G(a)) \vee (F(b) \wedge G(b));$

D. $(F(a) \vee G(a)) \wedge (F(b) \vee G(b))$



第四章 自然语句形式化



4.6

() 14. 设 $A(x)$: x 是人, $B(x)$: x 犯错误, 命题“没有人不犯错误”符号化为_____

A. $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$

B. $\neg(\exists x)(A(x) \rightarrow \neg B(x))$

C. $\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$

D. $\neg(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$

D

4.7

8. 设 $R(x)$ 表示 x 是实数, $E(x, y)$ 表示 $x=y$, 则语句“对所有的实数 x , 都存在实数 y , 使得 $x=y$ ”的符号化为

$$\underline{(\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists y)(R(y) \wedge E(x, y)))}$$



第四章 普遍有效性的判定



4.8

9. 公式 $(\exists x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$ 不是 (是/不是) 普遍有效的;
 $Q(0)=Q(1)=P(0)=F, P(1)=F$

4.9

10. 公式 $\neg((\forall x)F(x) \rightarrow (\exists y)G(y)) \wedge (\exists y)G(y)$ 是 (是/不是) 不可满足的
化简



考点一：等值式

考点二：范式

□前束范式：去联结词 \rightarrow 否定词内移 \rightarrow 量词左移 \rightarrow 变元异名

□Skolem 标准型

考点三：推理演算

□全称/存在量词的引入与消去

□归结推理



5.6

(A) 15. 下列各式哪个不正确?

A. $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

B. $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

C. $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

D. $(\forall x)(P(x) \vee q) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee q$



第五章 范式

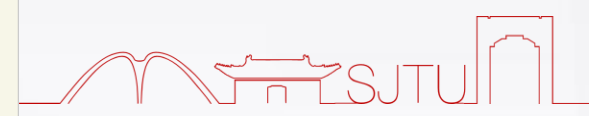


六(8') 求公式 $((\forall x)(\exists y)(P(x,y) \rightarrow Q(y))) \rightarrow (\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))$ 的前束范式和 Skolem 标准形。

$$\begin{aligned}
 & ((\forall x)(\exists y)(P(x,y) \rightarrow Q(y))) \rightarrow (\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists u)(\forall v)L(x,u,v)) \\
 = & \neg ((\forall x)(\exists y)(\neg P(x,y) \vee Q(y))) \vee (\forall x)(\neg R(x) \vee (\exists u)(\forall v)L(x,u,v)) \\
 = & (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \wedge \neg Q(y)) \vee (\forall x)(\neg R(x) \vee (\exists u)(\forall v)L(x,u,v)) \\
 = & (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \wedge \neg Q(y)) \vee (\forall x)(\exists u)(\forall v)(\neg R(x) \vee L(x,u,v)) \\
 = & (\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(P(x,y) \wedge \neg Q(y)) \vee (\neg R(z) \vee L(z,f(y,z),v))
 \end{aligned}$$

skolem标准型

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v) P(a,y) \wedge \neg Q(y) \vee \neg R(z) \vee L(z,f(y,z),v).$$





第五章 推理演算



5.8

八. (10') 任用一种推理方法证明:

$$(\exists x)(R(x) \wedge W(x)), (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(W(x) \wedge \neg P(x))$$

- | | | |
|------|---|----------|
| (1) | $(\exists x) R(x) \wedge W(x)$ | 前提引入 |
| (2) | $R(a) \wedge W(a)$ | 存在量词消去 |
| (3) | $R(a)$ | (2) |
| (4) | $(\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x))$ | 前提引入 |
| (5) | $R(a) \rightarrow \neg Q(a)$ | 全称量词消去 |
| (6) | $\neg Q(a)$ | (2)(5)分离 |
| (7) | $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ | 前提引入 |
| (8) | $P(a) \rightarrow Q(a)$ | 全称量词消去 |
| (9) | $\neg Q(a) \rightarrow \neg P(a)$ | (8)置换 |
| (10) | $\neg P(a)$ | (6)(9)分离 |
| (11) | $W(a)$ | (2) |
| (12) | $\neg P(a) \wedge W(a)$ | (10)(11) |
| (13) | $(\exists x)(\neg P(x) \wedge W(x))$ | 存在量词引入 |



谢谢!

饮水思源 爱国荣校