上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

SJTU

离散数学 第二次助教课

蔡子诺

2023年12月12日

饮 水 思 源 • 爱 国 荣 校

题目

- 1.2, 3, 4, 6, 8, 10
- 2.4, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17
- 4.1, 2, 5, 6, 7, 8, 9
- 5.5, 6, 8

第一章 命题逻辑的基本概念

- **考点一：命题的判断**
  - 非真即假的陈述句
- **考点二：命题联结词及真值表**
- **考点三：重言式、可满足式、矛盾式**
- **考点四：代入规则**
  - 原子命题、全部代换
- **考点五：命题形式化**
  - 易错点：异或的形式化
- **考点六：(逆)波兰表达式**

C, 真值表法

（ ）2. 命题公式¬(P∧Q)→R 具有______个使其为真的指派。

A 2

B 4

C 5

D 3

方法1：为假的指派->R为F，(P and Q)为F

方法2：真值表法

- 1.3 命题公式 ;$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$ 的波兰表达式为 $\vee P\wedge\vee QRS$

- 1.8 $(p\wedge q)\vee(\neg p)$ 的波兰表达式是：$\vee\wedge pq\neg p$

- 1.4 设P：天下雨，Q：他在室内运动，则命题“除非天下雨，否则他不在室内运动”的形式化为 $\neg P\rightarrow\neg Q$.

- 1.10 设P：“你陪伴我”，Q：“你代我叫车子”，R：“我将出去”。则命题：“除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去”的形式化为：$\neg(P\vee Q)\rightarrow\neg R$

- 1.6 命题公式 $(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$ 是 重言式

P	Q	结果
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

第二章 命题逻辑的等值和推理演算

- 考点一：等值公式（18条）
- 考点二：联结词的完备集
- 考点三：对偶式
- **考点四：范式、主范式**
- 考点五：推理公式
- **考点六：推理演算**
  - 条件证明规则
  - 归结法

第二章 联结词的完备集

（B）3. 下面有______个命题联结词集合是完备集。

$\{\neg,\wedge\}$，$\{\neg,\vee\}$，$\{\neg,\rightarrow\}$，$\{\neg,\leftrightarrow\}$，$\{\vee,\rightarrow\}$，$\{\wedge,\leftrightarrow\}$，$\{\vee,\uparrow\}$，$\{\downarrow\}$

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

最小完备集的个数为4个

不完备集

- $\{\vee,\wedge,\rightarrow,\leftrightarrow\}$不是完备的
  因为$\neg$不能仅由该集合的联结词表达出
- $\{\neg,\leftrightarrow\}$不是完备的
- $\{\vee,\wedge,\rightarrow,\leftrightarrow\}$的任何子集都是不完备的
  $\{\neg,\leftrightarrow\}$的任何子集也是不完备的
  (如果一个联结词的集合是不完备的，那么它的任何子集都是不完备的)
- $\{\vee,\wedge\}$不是完备的

2.8

逻辑联结词或非↓可以定义为：$x \downarrow y = \neg(x \vee y)$。将公式 $\neg(x \vee y) \wedge z$ 转换成只用↓表示的公式 $((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)) \downarrow (z \downarrow z)$.

2.12

$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$，用或非联结词表示出 $P \to Q$ 为______。

$((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)$

2.4

4. $P \to Q \vee R \to S$的对偶式为 $(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge S$ 。

注意运算顺序和括号的添加

第二章 主范式（填空题）

- 2.7

C

( ) 13. 命题公式 $\neg(P \wedge Q) \to R$ 的主析取范式中含极小项的个数为______

A. 8　　B. 3　　C. 5　　D. 0

- 2.13

7. 已知公式 $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow (Q \to P))$，其主合取范式为______ M_1 ______。

P	Q	结果
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

SJTU

第二章：主范式

2.17 设命题公式 $G = \neg(P \to Q) \vee (Q \wedge (\neg P \to R))$，求 G 的主析取范式。

1. 消去联结词
2. 否定词内移
3. 使用分配律
4. 添加缺失项

$$
\begin{aligned}
G &= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge (P \vee R)). \\
&= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge R). \\
&= (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\
&\quad \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \\
&\quad \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\
&= \vee_{3;4;5;6;7}
\end{aligned}
$$

主合取范式：$\wedge_{7;6;5}$

2.14

2. 设命题公式$G = \neg(P \to Q)$，$H = P \to (Q \to \neg P)$，则G与H的关系是（ A ）

(A) $G \Rightarrow H$ (B) $H \Rightarrow G$ (C) $G = H$ (D) 以上都不是

$G = P \wedge \neg Q$.

$H = \neg P \vee (\neg Q \vee \neg P)$

$= \neg P \vee \neg Q$.

$G \Rightarrow H$ 成立

$H \Rightarrow G$ 不成立.

2.15

3. 下面 4 个推理定律中，不正确的是（ D ）。

(A) $A \Rightarrow (A \vee B)$ (B) $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$

(C) $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$ (D) $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

第二章：自然语句形式化+推理演算

七、(8') 证明下列推理关系：如果李华在光明中学上学，那么他不是初中生，就是高中生。如果李华是初中生，那么他需要参加中考。如果李华是高中生，那么他经常给外国的友人写信。如果李华经常给外国的友人写信，那么他的英文写作能力很强。李华的英文写作能力不强。从而知：如果李华在光明中学上学，那么他需要参加中考。

自然语句形式化

P: 李华在光明中学上学
Q: 李华初中生
R 李华高中生
S: 李华参加中考
T 李华给外国友人写信
W 李华英文写作能力强

$(P \to \boxed{Q \bar{\vee} R})$, $Q \to S$, $R \to T$, $T \to W$, $\neg W \Rightarrow P \to S$

(1)	P	附加前提引入.
(2)	$P \to Q \bar{\vee} R$	前提引入.
(3)	$Q \bar{\vee} R$	(1)(2)分离
(4)	$T \to W$	前提引入.
(5)	$\neg W \to \neg T$	(4)置换
(6)	$\neg W$	前提引入.
(7)	$\neg T$	(5)(6)分离
(8)	$R \to T$	前提引入
(9)	$\neg T \to \neg R$	(8)置换
(10)	$\neg R$	(7)(9)分离
(11)	Q	(3)(10)
(12)	$Q \to S$	前提引入
(13)	S	(11)(12)分离
(14)	$P \to S$	条件证明规则

六．(8') 任用一种推理方法证明：$(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\gamma)\wedge(\delta\to\neg\gamma)\Rightarrow\neg(\alpha\wedge\delta)$

$\neg(\alpha\wedge\delta) = \neg\alpha\vee\neg\delta = \alpha\to\neg\delta.$

证明：

(1) α 附加前提引入

(2) $\alpha\to\beta$ 前提引入

(3) β (1)(2)分离

(4) $\beta\to\gamma$ 前提引入

(5) γ (3)(4)分离

(6) $\delta\to\neg\gamma$ 前提引入

(7) $\gamma\to\neg\delta$ (6)置换

(8) $\neg\delta$ (5)(7)分离

(9) $\alpha\to\neg\delta$ 条件证明规则

第四章 谓词逻辑的基本概念

- 考点一：基本概念（谓词、个体词、函数、量词、自由变元与约束变元、辖域）
- 考点二：合式公式的判断
- **考点三：自然语句形式化**
  - 所有的有理数都是实数；
  - 有的实数是有理数；
  - 没有有理数是无理数；
  - 有的实数不是有理数
- 考点四：有限域下的表示
- 考点五：普遍有效性的判定

4.5

6. 公式$(\forall x)\left(\left(P(x)\to Q(x)\right)\wedge(\exists y)R(y)\right)\wedge S(z)$的自由变元是__z__，全称量词的辖域为__$\left(\left(P(x)\to Q(x)\right)\wedge(\exists y)R(y)\right)$__。

4.1

（ ）5. 若个体域为整数集合，下列公式中__C__不是命题。

A. $(\forall x)(\forall y)(x\cdot y=x)$

B. $(\forall x)(\exists y)(x\cdot y=1)$

C. $(\forall x)(x\cdot y=x)$

D. $(\exists x)(\exists y)(x\cdot y=2)$

4.2

(C) 6. 设个体域 D={a, b}，则公式 $(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$ 消去量词后可表示为______。

A. $(F(a)\wedge F(b))\vee(G(a)\wedge G(b))$；

B. $(F(a)\vee F(b))\wedge(G(a)\vee G(b))$；

C. $(F(a)\wedge G(a))\vee(F(b)\wedge G(b))$；

D. $(F(a)\vee G(a))\wedge(F(b)\vee G(b))$

4.6

( ) 14. 设 A(x)：x 是人，B(x)：x 犯错误，命题“没有人不犯错误”符号化为______

A. $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$

B. $\neg(\exists x)(A(x) \rightarrow \neg B(x))$

C. $\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$

D. $\neg(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$

D

4.7

8. 设 R(x)表示 x 是实数，E(x, y)表示 x=y， 则语句“对所有的实数 x，都存在实数 y，使得 x=y”的符号化为

$(\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists y)(R(y) \wedge E(x,y)))$

4.8

9\. 公式 $(\exists x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$ 不是 ______(是/不是)普遍有效的；

Q(0)=Q(1)=P(0)=F, P(1)=F

4.9

10\. 公式 $\neg((\forall x)F(x) \rightarrow (\exists y)G(y)) \wedge (\exists y)G(y)$ 是 ______(是/不是)不可满足的

化简

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

考点一：等值式

考点二：范式

- 前束范式：去联结词 -> 否定词内移 -> 量词左移 -> 变元异名
- Skolem 标准型

考点三：推理演算

- 全称/存在量词的引入与消去
- 归结推理

5.6

（A）15. 下列各式哪个不正确?

A. $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

B. $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

C. $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

D. $(\forall x)(P(x) \vee q) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee q$

六(8') 求公式$((\forall x)(\exists y)(P(x,y) \to Q(y))) \to (\forall x)(R(x) \to (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))$

的前束范式和 Skolem 标准形。

$$((\forall x)(\exists y)(P(x,y) \to Q(y))) \to \forall x(R(x) \to (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))$$

$$= \neg((\forall x)(\exists y)(\neg P(x,y) \vee Q(y))) \vee (\forall x)(\neg R(x) \vee (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))$$

$$= (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \wedge \neg Q(y)) \vee (\forall x)(\neg R(x) \vee (\exists u)(\forall v)L(x,u,v))$$

$$= (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \wedge \neg Q(y)) \vee ((\forall x)(\exists u)(\forall v))(\neg R(x) \vee L(x,u,v))$$

$$= (\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(P(x,y) \wedge \neg Q(y)) \vee (\neg R(z) \vee L(z,u,v))$$

skolem标准型

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)\ P(a,y) \wedge \neg Q(y) \vee \neg R(z) \vee L(z,f(y,z),v)$$

5.8

八.（10'）任用一种推理方法证明：

$$(\exists x)(R(x)\wedge W(x)),(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)),(\forall x)(R(x)\rightarrow\neg Q(x))\Rightarrow(\exists x)(W(x)\wedge\neg P(x))$$

(1)	$(\exists x)R(x)\wedge W(x)$	前提引入
(2)	$R(a)\wedge W(a)$	存在量词消去
(3)	$R(a)$	(2)
(4)	$(\forall x)(R(x)\rightarrow\neg Q(x))$	前提引入
(5)	$R(a)\rightarrow\neg Q(a)$	全称量词消去
(6)	$\neg Q(a)$	(2)(5) 分离
(7)	$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$	前提引入
(8)	$P(a)\rightarrow Q(a)$	全称量词消去
(9)	$\neg Q(a)\rightarrow\neg P(a)$	(8) 置换
(10)	$\neg P(a)$	(6)(9) 分离
(11)	$W(a)$	(2)
(12)	$\neg P(a)\wedge W(a)$	(10)(11)
(13)	$(\exists x)(\neg P(x)\wedge W(x))$	存在量词引入

谢谢！

饮 水 思 源　爱 国 荣 校