上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

第一次习题课

施宏建

2023年10月18日

饮 水 思 源 • 爱 国 荣 校

01 基本概念

- 知识点总结
- 复习题
- 课后作业

知识点总结

- 基本定义
  - 图
  - 度
    - 结点关联的边数
    - 自环对度的贡献是2
  - 简单图：无重边无自环的无向图
  - 赋权图/正权图
  - 支撑子图/生成子图，导出子图
  - 图的并、交和对称差
  - 直接后继集/直接前趋集
  - 同构

- 基本性质
  - 结点和边的数量关系
  - 奇数度的结点数量为偶数个
  - 正度之和等于负度之和
  - 完全图的边数
  - 非空简单图存在度相同的节点

- 同构的必要条件
  - 结点数量与边数量各自相等；
  - 度的非增序列相同；
  - 存在同构的导出子图。

知识点总结

邻接矩阵

- 有向图

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_i,v_j)\in E\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

- 无向图
  - 对称矩阵

关联矩阵

- 有向图

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k)\in E\\ -1, & e_j=(v_k,v_i)\in E\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

- 无向图

	邻接矩阵	关联矩阵
结点数量	矩阵的行数/列数	矩阵的行数
边数量	非零元素数量（有向图）	矩阵的列数
表示自环	能	不能
表示重边	不能	能

复习题

- 简单图：无重边、无自环的无向图

下列关于简单图，下列说法错误的是

空图是简单图	7 回应者	12 %
简单图没有自环		0 %
简单图没有重边	3 回应者	5 %
简单图都是无向图	50 回应者	83 %

复习题

- 有方向+两点间有多条边=有向多重图

交通导航适合用下面哪种图表示

有向简单图	10 回应者	17 %	
有向多重图	47 回应者	78 %	✓
无向多重图	2 回应者	3 %	
简单图	1 回应者	2 %	

课后作业

节点的度

完全图的每边任给一个方向，称为有向完全图。证明在有向完全图中

$$\sum_{v_i\in V}(d^+(v_i))^2=\sum_{v_i\in V}(d^-(v_i))^2。$$

注意$d(v_i)$指的是节点的度

$$d^+(v_i)+d^-(v_i)=n-1$$

$$\sum_{v_i\in V}d^+(v_i)=\sum_{v_i\in V}d^-(v_i)=m=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{v_i\in V}[d^+(v_i)]^2-\sum_{v_i\in V}[d^-(v_i)]^2$$

$$=\sum_{v_i\in V}[d^+(v_i)-d^-(v_i)][\underbrace{d^+(v_i)+d^-(v_i)}_{n-1}]$$

$$=(n-1)\sum_{v_i\in V}[d^+(v_i)-d^-(v_i)]$$

$$=(n-1)\left[\sum_{v_i\in V}d^+(v_i)-\sum_{v_i\in V}d^-(v_i)\right]$$

$$=0$$ 图的性质1.1.3

课后作业

节点的度

证明 9 个人中若非至少有 4 个人互相认识，则至少有 3 个人互相不认识。

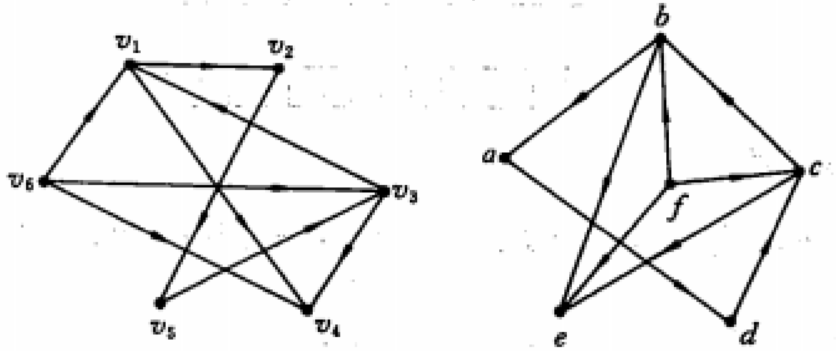
引理:六个人中必有三个人相互认识或相互不认识。 (拉姆塞定理)

引理证明：
1. 设其中一人为A。 若A认识其中三个人，则若三个人之间相互不认识，得证。若三人之中有两人相互认识，则加上A，三人相互认识。
2. 若A不认识其中三个人，则若三个人之间相互认识，得证。若三人之中有两人相互不认识，则加上A，三人相互不认识。

证明:
1. 若九个人中存在一个人不认识其中四个人，设其为A。则若四个人相互认识，存在4个人相互认识；若四个人中有两人相互不认识，则加上A，存在3个人相互不认识。
2. 若全部九个人都认识至少五个人，则至少有一个人认识至少六个人(图中度为奇数的节点必有偶数个)。则由引理：六个人中有三人互相认识，加上A就有4个人相互认识；或者六个人里有三个人互不认识。得证。

课后作业

- 邻接矩阵、关联矩阵



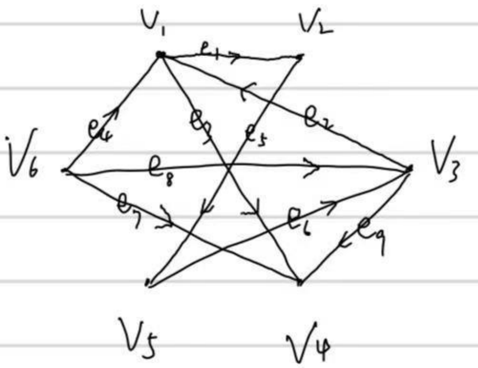
(a) (b)

题图 1.7

写出题图 1.7(a)的邻接矩阵、关联矩阵，边列表及正向表。

邻接矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&0\end{bmatrix}$$



关联矩阵

$$B=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&0&0&0&0&0\\-1&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&-1&1\\0&0&-1&0&0&0&-1&0&-1\\0&0&0&0&-1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&1&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6&e_7&e_8&e_9\end{matrix}\end{array}$$

02

道路与回路

- 知识点总结
- 复习题
- 课后作业

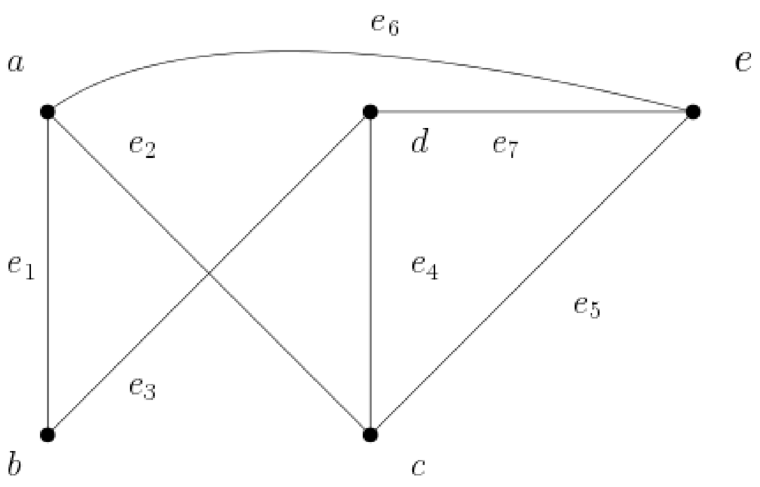
知识点总结

- 道路与回路
  - 道路、简单道路、初级道路
  - 回路、简单回路、初级回路
  - 连通图、极大联通子图（不止一个）
- 欧拉道路与回路
  - 定义：经过所有边的简单道路（回路）
  - 充要条件
- 哈密顿道路与回路
  - 定义：经过所有点的初级道路（回路）
  - 充分性定理
- 数学归纳法
- 反证法

复习题

无向图的道路

图G_1中以下哪些是道路（path）：



The Graph G_1

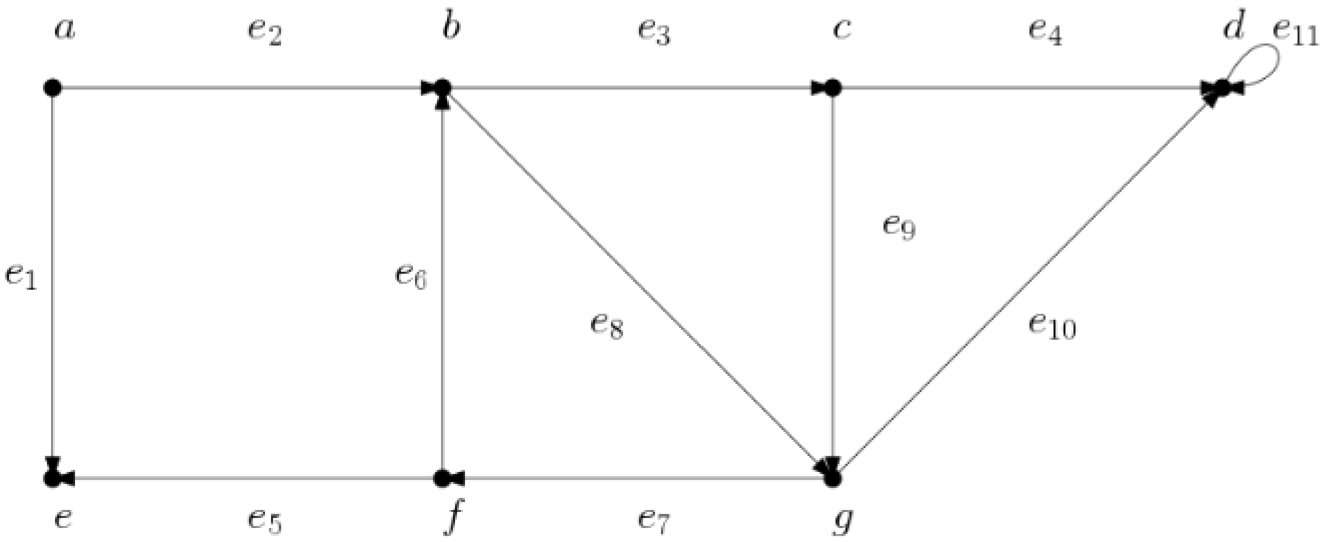
(其中a, b, c, d, e为结点 (vertex)，e_i为边(edge))

a, e6, e, e6, a, e2, c, e2, a	43 回应者	75 %	✓
a, e1, a, e2, c, e5, e	5 回应者	9 %	
a, e2, c, e4, d, e3, b	57 回应者	100 %	✓

复习题

有向图的回路

在有向图G_4中，以下哪一些是回路(circuit)?



The Graph G_4

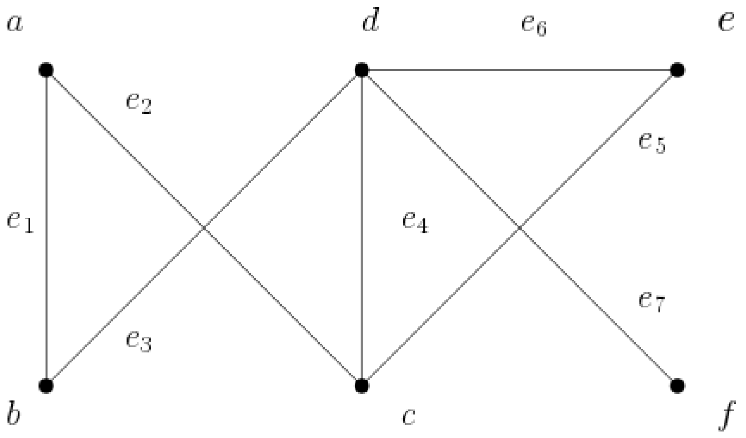
其中a,b,c,d,e,f,g为结点，e_i为边

c, e9, g, e10, d, e4, c	13 回应者	23 %	
d, e11, d	54 回应者	95 %	✓
b, e3, c, e9, g, e7, f, e6, b	56 回应者	98 %	✓

复习题

- 单个节点是道路，不是回路

图G_2中以下哪些道路为简单回路 (simple circuit)?

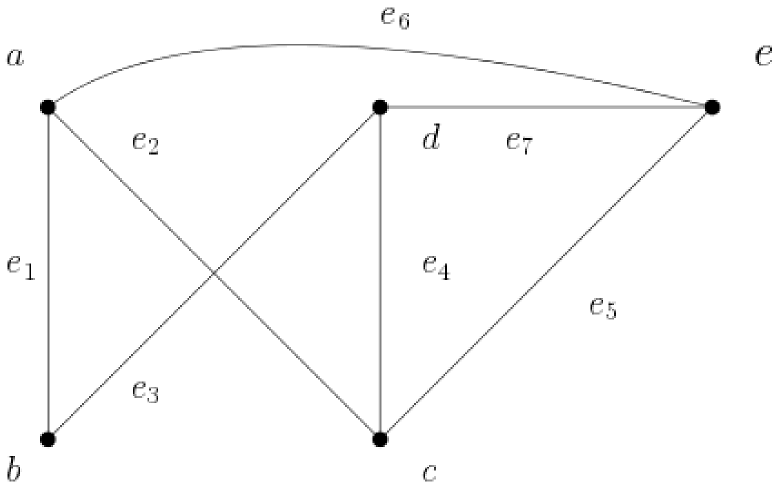


The Graph G_2

(其中a, b, c, d, e, f为结点， e_i为边)

a, e2, c, e2, a		0 %	
d, e6, e, e5, c, e4, d	57 回应者	100 %	✓
a, e2, c, e4, d, e6, e, e5, c, e4, d, e3, b, e1, a	3 回应者	5 %	
a	9 回应者	16 %	

图G_1中以下哪些是回路(circuit)？



The Graph G_1

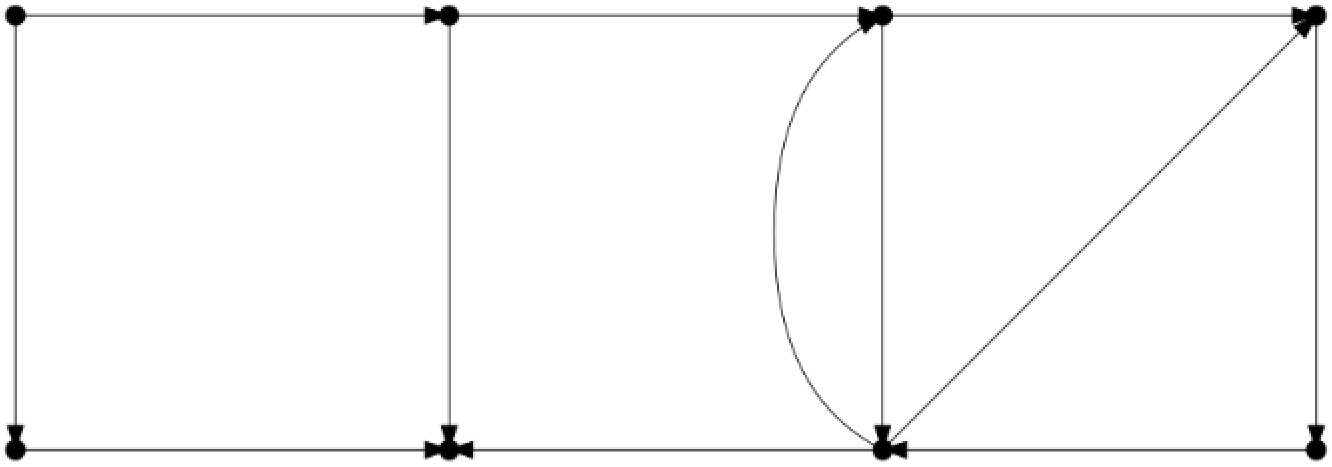
(其中a, b, c, d, e为结点， e_i为边)

a	9 回应者	16 %	
e, e5, c, e4, d, e7, e	57 回应者	100 %	✓
a, e6, e, e7, d	1 回应者	2 %	
a, e2, c, e2, a	48 回应者	84 %	✓

复习题

- 强连通分支：分支内两两节点相互可达

有向图G_5中，有多少强连通分支？



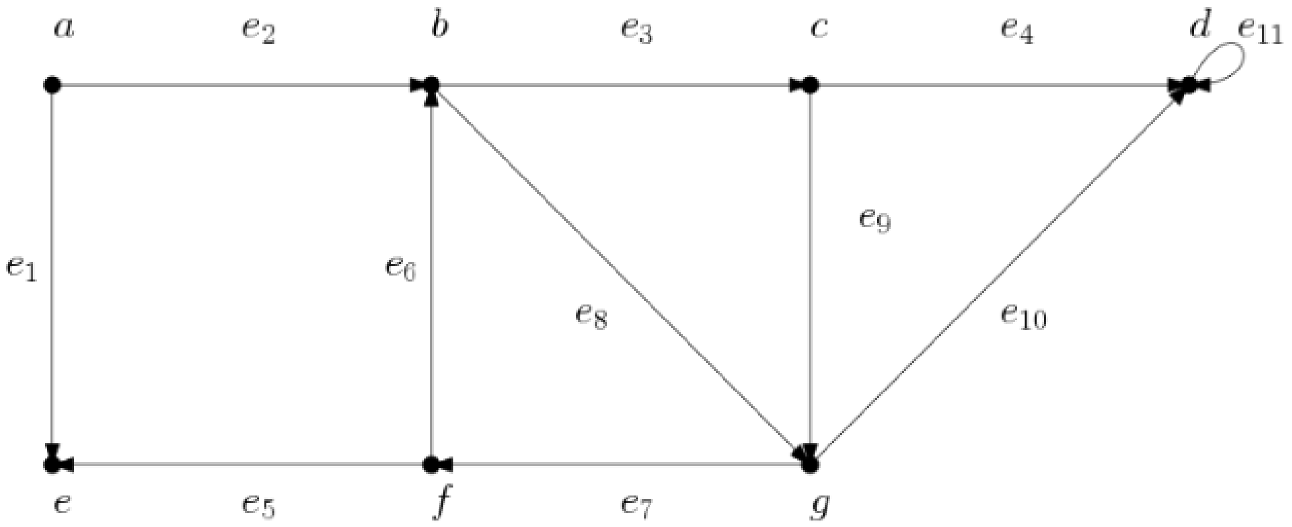
The Graph G_5

6	2 回应者	4 %	
3	12 回应者	21 %	
4	3 回应者	5 %	
5	40 回应者	70 %	✓

复习题

- 强连通分支：分支内两两节点相互可达

在有向图G_4中，有多少强连通分支?



The Graph G_4

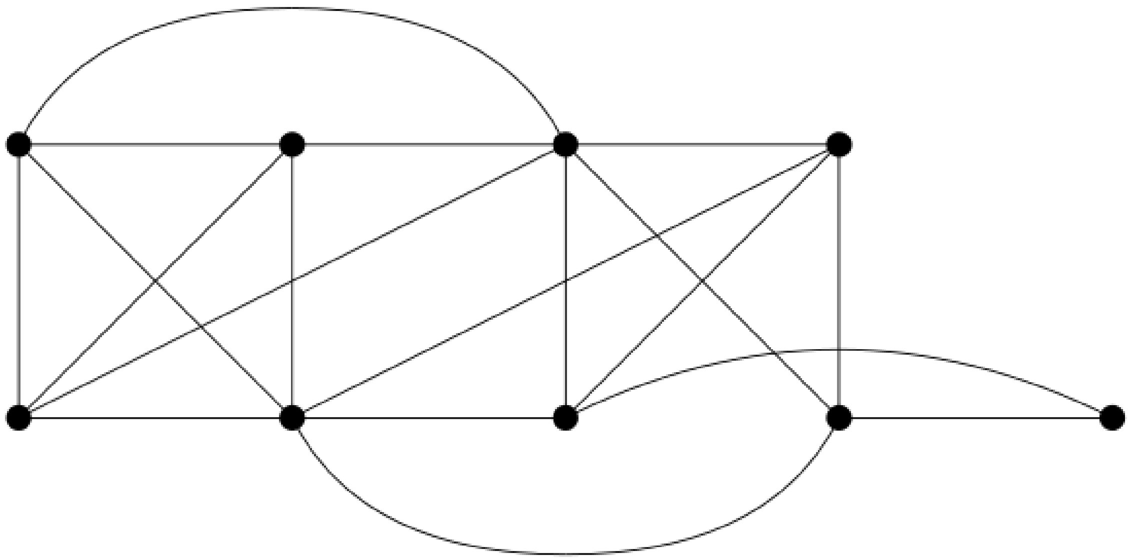
其中a,b,c,d,e,f,g为结点，e_i为边

5	3 回应者	5 %	
4	40 回应者	70 %	✓
2	5 回应者	9 %	
3	9 回应者	16 %	

复习题

欧拉道路（回路）：奇度节点数量

图G_7中是否存在欧拉道路和欧拉回路?



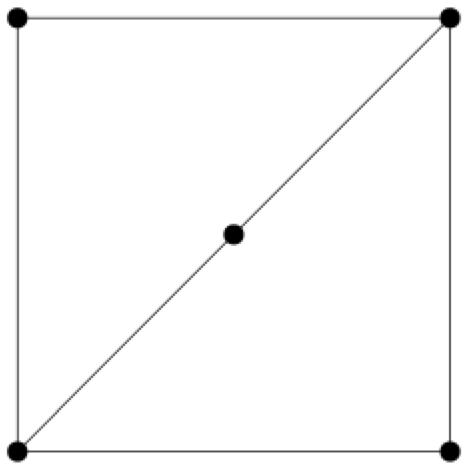
The Graph G_7

存在欧拉道路和欧拉回路	45 回应者	79 %	✓
欧拉回路和欧拉道路均不存在	1 回应者	2 %	
存在欧拉道路，但不存在欧拉回路	6 回应者	11 %	
存在欧拉回路，但不存在欧拉道路	5 回应者	9 %	

复习题

哈密尔顿道路（回路）

图G_8中是否存在哈密尔顿回路(Hamilton circuit)和哈密尔顿道路(Hamilton path)?

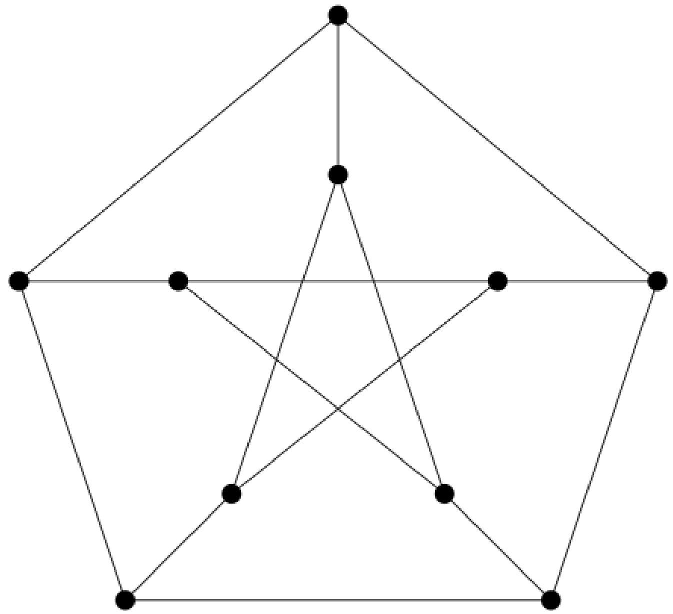


The Graph G_8

存在哈密尔顿道路，但没有哈密尔顿回路	51 回应者	89 %	✓
哈密尔顿道路和哈密尔顿回路均不存在	2 回应者	4 %	
存在哈密尔顿回路，但不存在哈密尔顿回路	2 回应者	4 %	
哈密尔顿回路和哈密尔顿道路均存在	2 回应者	4 %	

哈密尔顿道路（回路）

图G_9是著名的Petersen图。尝试通过穷举判断该图中是否存在哈密尔顿道路(Hamilton path)和哈密尔顿回路(Hamilton circuit)?



The Graph G_9

存在哈密尔顿道路，但没有哈密尔顿回路	67 回应者	86 %	✓
存在哈密尔顿道路和哈密尔顿回路		0 %	
存在哈密尔顿回路，但没有哈密尔顿道路		0 %	
哈密尔顿道路和哈密尔顿回路均不存在	11 回应者	14 %	

课后作业

连通图

证明 G 和 $\overline{G}$ 至少有一个是连通图。

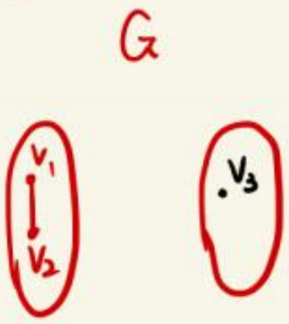
设 G 不连通.

对任意两点 v_1 v_2.

若 $(v_1, v_2) \notin E(G)$，则 $(v_1, v_2) \in E(\overline{G})$，即 v_1、v_2 在 $\overline{G}$ 中连通

若 $(v_1, v_2) \in E(G)$，那么在另一个连通分支中找一点 v_3

↓ 在 $\overline{G}$ 中 (v_1, v_3) (v_2, v_3) 必存在，即 v_1、v_2 在 $\overline{G}$ 中连通



∴ 若 G 不连通

$\overline{G}$ 中任意两点都连通.

课后作业

连通图的最长道路

证明：若连通图的最长道路不唯一，则它们必定相交。

假设连通图 G 有两条不相交最长道路

$L_1=(V_{10}, e_{11}, V_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n}, V_{1n})$ ，$L_2=(V_{20}, e_{21}, V_{21}, e_{22}, \cdots, e_{2n}, V_{2n})$

由于 L_1，L_2 不相交，则对 $\forall i,j=1,2,\dots,n$ 有 $e_{1i}\neq e_{2j}$.

由于 G 连通，则 $\exists i,j=0,1,2,\cdots,n$ 使得 V_{1i} 与 V_{2j} 之间有道路 $L_3=(V_{1i}, e_1, V_2, e_2, \cdots, e_m, V_{2j})$

其中对 $\forall p,q=1,2,\dots,n$ 及 $k=1,2,\dots,m$ 有 $e_k\neq e_{1p}$ 且 $e_k\neq e_{2q}$

此时，令 $L_{11}=(V_{10}, e_{11}, V_{11}, e_{12}, \cdots, V_{1i})$，$L_{12}=(V_{1i}, e_{1i}, \cdots, e_{1n}, V_{1n})$

$L_{21}=(V_{20}, e_{21}, V_{21}, e_{22}, \cdots, V_{2j})$，$L_{22}=(V_{2j}, e_{2j}, \cdots, e_{2n}, V_{2n})$

则不妨设 L_{11} 长度 $l_{11}\geq\frac{n}{2}$，L_{22} 长度 $l_{22}\geq\frac{n}{2}$，而 L_3 长度 $l_3\geq 1$

故有道路 $L_4=(V_{10}, e_{11}, V_{11}, e_{12}, \cdots, V_{1i}, e_1, V_2, e_2, \cdots, e_m, V_{2j}, e_{2j}, \cdots, e_{2n}, V_{2n})$

的长度 $l_4=l_{11}+l_{22}+l_3\geq\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+1=n+1$，比 L_1 及 L_2 长，矛盾

故 L_1，L_2 必相交

课后作业

带弦回路

在简单图中，证明：若 $n \geq 4$ 且 $m \geq 2n-3$，则 G 中含有带弦的回路。

1° 当 $n=4$ 时，$m \geq 5$，此时 G 中含带弦回路

2° 若 $n=k$ 时成立，则当 $n=k+1$ 时，对 G 中极长初级道路 L，设其一端点为 v_0，则

① 若 $d(v_0) \geq 3$，假设 $\exists v_1$ 与 v_0 相连且 $v_1 \notin V(L)$，则 $\{v_1, L\}$ 为更长道路，矛盾。故 v_0 邻点均在 L 上，此时 $\exists$ 带弦回路

② 若 $d(v_0) < 3$，则 $E(G-\{v_0\}) \geq m-2 = 2(k+1)-3-2 = 2k-3$，此时 $G-\{v_0\}$ 含带弦回路

综合 1°，2° 有 G 含带弦回路

课后作业

哈密尔顿回路

设 G 是 $n\geqslant 3$ 的简单图，证明：若 $m\geqslant\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$，则 G 存在 H 回路。

若$\exists v_i, v_j \in V(G)$使得$d(v_i)+d(v_j)<n$.

则$E(G-\{v_i,v_j\}) > m-n = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2-n$

$= \frac{1}{2}n^2-\frac{5}{2}n+3 = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$

而$E(G-\{v_i,v_j\}) \leq K_{n-2} = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$

矛盾，故对$\forall v_i, v_j \in V(G)$，均有$d(v_i)+d(v_j)\geq n$

由推论2.4.1有G存在H回路

课后作业

哈密尔顿道路

设 G 是有向完全图，证明 G 中存在有向的哈密顿道路。

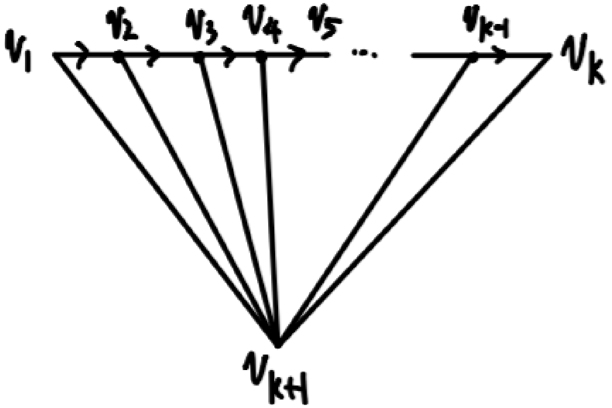
注意数学归纳法的要点：
1. 初始条件
2. 推导条件

$n=3$ 时，三个点的有向完全图存在H道路

假设 $n\le k$ 时，G中存在H道路

当 $n=k+1$ 时，删除 v_{k+1} 剩下的图是结点数为k的有向完全图

设这k个点中存在H道路 $v_1 \to v_2 \to v_3 \cdots \to v_k$



证明 (v_{k+1}, v_1) 或者 (v_k, v_{k+1}) 或者存在 (v_i, v_{k+1}) 和 (v_{k+1}, v_{i+1})

课后作业

哈密尔顿回路

在例 2.4.5 中，若 $n \geq 4$，证明这 n 个人一定可以围成一圈，使相邻者互相认识。

例 2.4.5 设 $n(\geq 3)$ 个人中，任两个人合在一起都认识其余 $n-2$ 个人。证明这 n 个人可以排成一队，使相邻者都互相认识。

证明：每个人用一个结点表示，相互认识则用边连接相应的结点，于是得到简单图 G。若 G 中有 H 道路，则问题得证。由已知条件，对任意两点 $v_i, v_j \in V(G)$，都有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n-2$。此时若 v_i 与 v_j 相识，即 $(v_i, v_j) \in E(G)$，则 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$；若不相识，必存在 $v_k \in V(G)$，满足 $(v_i, v_k),(v_j, v_k) \in E(G)$。否则，设 $(v_i, v_k) \notin E(G)$，就出现 v_k, v_j 合在一起不认识 v_i，与原设矛盾。因此也有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n-1$。综上由定理 2.4.1，G 中存在 H 道路。

- 设n(n>=4)个人中，任两个人合在一起都认识其余n-2个人。证明这n个人可以排成一**圈**，使相邻者都相互认识。
  - $d(u)+d(v) \geq n$

03

树

- 知识点总结
- 复习题
- 课后作业

知识点总结

- 树的有关定义
  - 树的定义：不含回路的连通图
  - 割边
  - 支撑树
- 哈夫曼树
- 最短树
  - Kruskal 算法
  - Prim 算法
- 补充：二叉树
  - 满二叉树
  - 完全二叉树

复习题

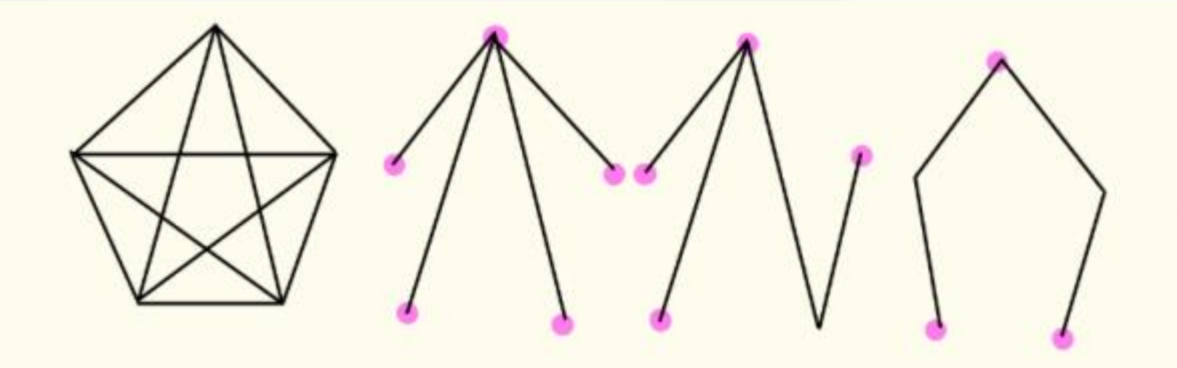
- 哈夫曼树没有度为1的结点：这个说法里的结点只针对非叶子结点

在Huffman 树中没有正度为1的结点。

True	48 回应者	87 %	✓
False	7 回应者	13 %	

复习题

- 同构：G1和G2顶点度的非增序列相同
- 树：无回路，连通
  - 11114
  - 11123
  - 11222



5个结点的完全图G，其不同构的生成树的个数是（　）

3	36 回应者	65 %
8	2 回应者	4 %
4	15 回应者	27 %
16	2 回应者	4 %

复习题

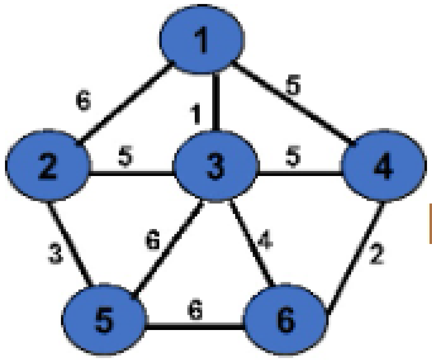
- 强连通：两两节点相互可达

含有n(n>1)个结点的强连通有向图，至少有（　　）条边。

n-1	8 回应者	15 %
n+1	1 回应者	2 %
n	**45 回应者**	**82 %** ✓
2n	1 回应者	2 %

复习题

- 最短树：Kruscal/Prim算法



图G

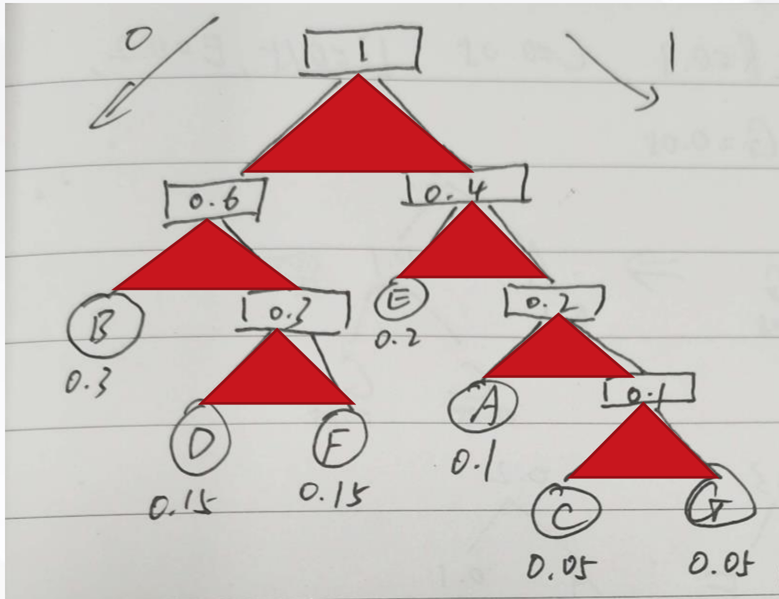
的最短树的权之和为（　）。

		0 %	✓
		0 %	✓
		0 %	✓
15	67 回应者	87 %	✓
其他事情	9 回应者	12 %	
无答案	1 回应者	1 %	

课后作业

Huffman树

32.【★☆☆☆】假设数据项 A, B, C, D, E, F, G 以下面的概率分布出现：$A:0.1$, $B:0.3$, $C:0.05$, $D:0.15$, $E:0.2$, $F:0.15$, $G:0.05$，求一种二进制编码方式使得传输一个数据项的期望长度最小，并求其期望。



A	110
B	00
C	1110
D	010
E	10
F	011
G	1111

$$\underbrace{0.1\times3}_{A}+\underbrace{0.3\times2}_{B}+\underbrace{0.05\times4}_{C}+\underbrace{0.15\times3}_{D}+\underbrace{0.2\times2}_{E}+\underbrace{0.15\times3}_{F}+\underbrace{0.05\times4}_{G}$$

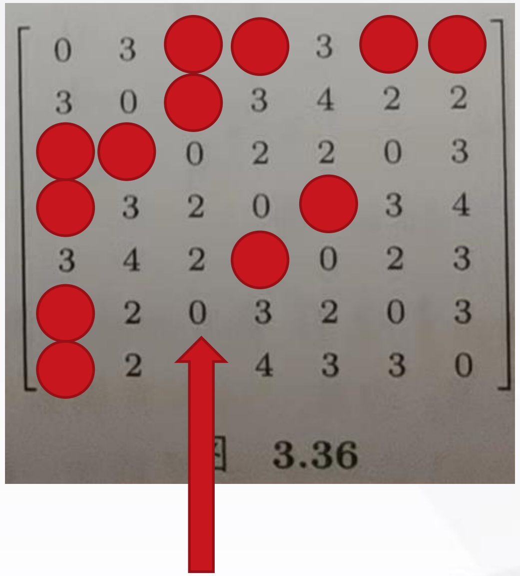
$$=0.3+0.6+0.2+0.45+0.4+0.45+0.2$$

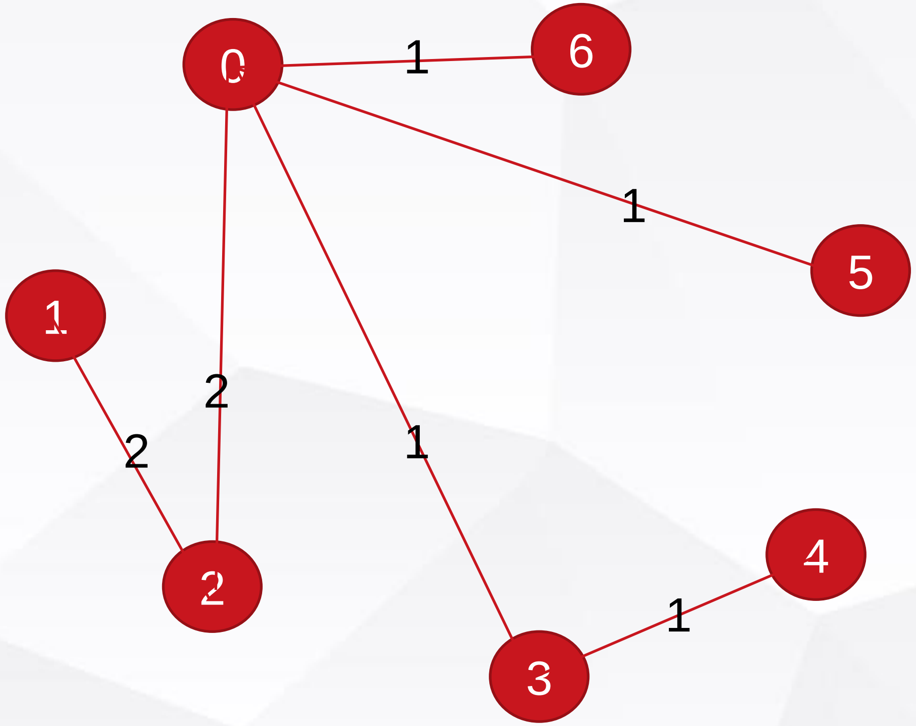
$$=2.6$$

课后作业

最短树

求权矩阵所示带权图中（见图 3.36）的最短树的边权之和。





最终边权和为8

04

补充题

下列关于图的基本概念的说法中，正确的有 BD 。

A. 一个包含 5 个节点的图中，节点的度数可能是 (3,4,2,2,4) 。 节点的度之和为奇数

B. 已知图 $G=(V,E)$，图 $G'=(V',E')$。 如果 G' 是 G 的支撑子图，那么 $V=V'$。

C. 无向图 G 和 G' 如图 1 所示，G' 是 G 的导出子图。 V2与V3缺少边

D. 如果 G 和 G' 不存在同构的导出子图，则 G 和 G' 一定不同构。

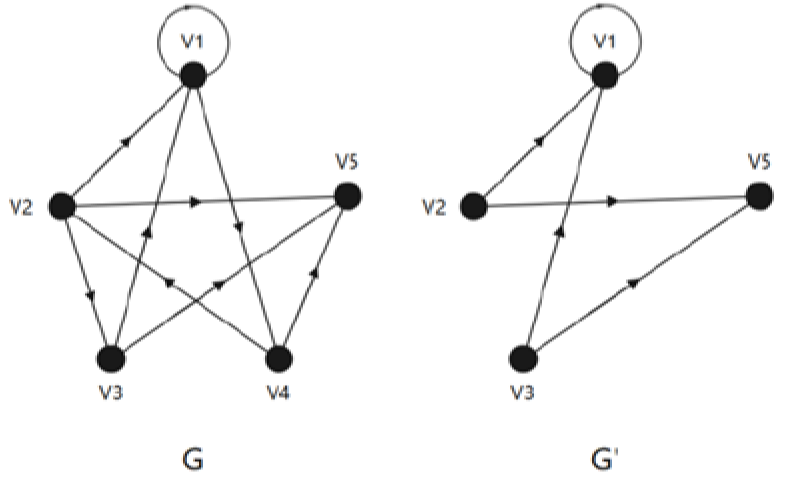


图 1

补充题

有向图 G 的邻接矩阵为$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，则 G中结点个数为__5__，边的条数为__10__，图 G 中__存在__ (存在/不存在/无法判断) 自环.

补充题

图 3 中<u>存在</u>(存在/不存在) 欧拉回路, <u>存在</u>(存在/不存在) 哈密顿回路.

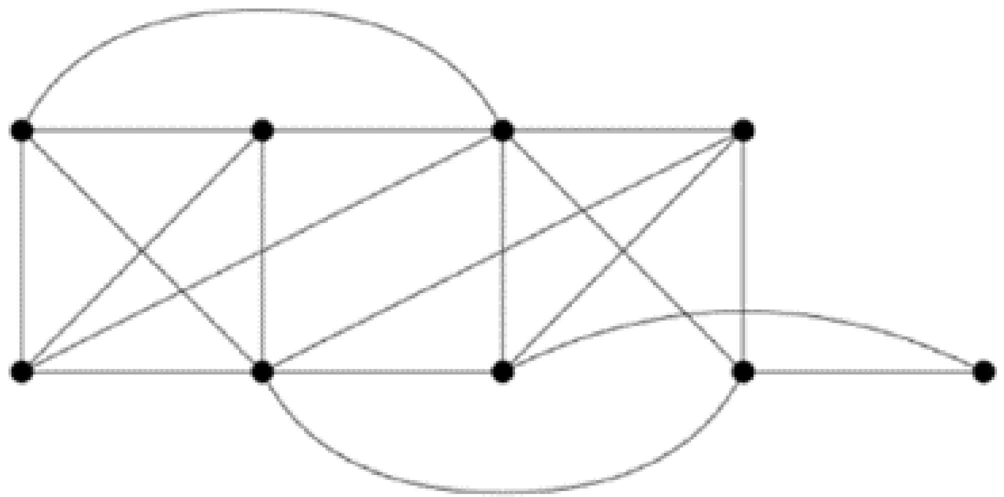


图3

补充题

[2^(k-2), 2^(k-1)]

一棵高度为 k 的完全二叉树的叶子结点个数的范围为 ____ . 在一棵完全二叉树中，某结点的右子树的高度为 k, 其左子树的高度为 ____ .

k或者k+1

SJTU

补充题

使用哈夫曼树对字符串"ihaveapenihaveanapple"进行编码，得到的哈夫曼树的带权路径总长为 __61__ .

Q&A

饮 水 思 源　爱 国 荣 校