

2021 年秋 《离散数学》 图论测试

姓名: _____

学号: _____

成绩: _____

一. 不定项选择题: 本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。 每小题有多个选项符合题意, 全部选对的得 4 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错或不答的得 0 分。

B.D

1. 下列关于图的基本概念的说法中, 正确的有 _____。

- A. 一个包含 5 个节点的图中, 节点的度数可能是 (3,4,2,2,4)。 *度之和为偶数*
- B. 已知图 $G = (V, E)$, 图 $G' = (V', E')$ 。 如果 G' 是 G 的支撑子图, 那么 $V = V'$ 。
- C. 无向图 G 和 G' 如图 1 所示, G' 是 G 的导出子图。 *未包含所有边*
- D. 如果 G 和 G' 不存在同构的导出子图, 则 G 和 G' 一定不同构。

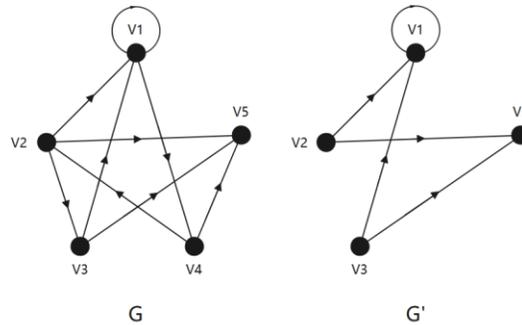


图 1

C.D

2. 下列关于图的代数表示的说法中, 正确的有 _____。

- A. 关联矩阵中能够表示自环和重边。 *邻接矩阵*
- B. 有向图的邻接矩阵一定不是对称矩阵。
- C. 如图 1 所示, 有向图 G 的邻接矩阵表示为 *无向图是一个对称矩阵*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D. 有向图的关联矩阵第 i 行元素和是节点 v_i 的正度和负度之差, 非零元素个数则是节点 v_i 的度。

A.B.C.D

3. 下列关于道路与回路的说法中, 正确的有 _____。

- A. 在有向图 G 中, 如果回路 L 是一条简单有向回路, 那么在 L 中不存在重复出现的边, 但是可以出现重复的节点。
- B. 在图 2 中, 如果将 G 看作无向图, 则其存在欧拉道路, 但不存在欧拉回路。
定理 2.3.1 判断节点的度
- C. 一个包含 5 个节点的简单图中, 节点的度数为 $(2,3,1,2,4)$, 那么此图中包含哈密顿道路但是不包含哈密顿回路。
(有节点的度为 1)
- D. 在图 2 中, 有向图 G 包含 3 个强连通分量。

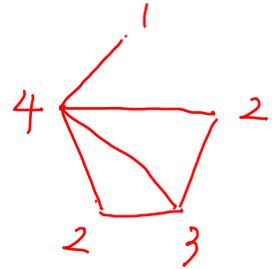
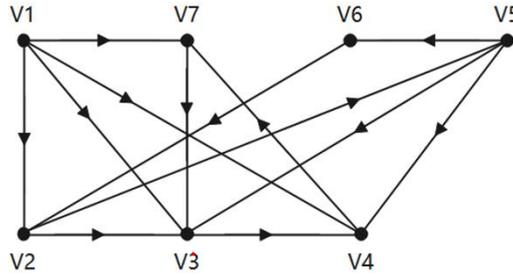
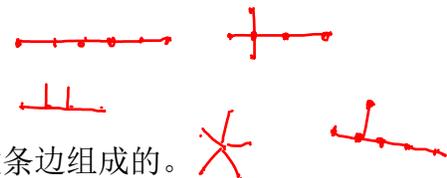


图 2



A

4. 下列说法中, 正确的有 _____。
- A. 如果二分图 G 中存在回路, 则它们都是由偶数条边组成的。
- B. 哈密顿图是有哈密顿通路的图。
- C. 空图是只有一个结点的图。*边集为空*
- D. 6 个结点的完全图 G , 其不同构的生成树的个数为 ~~5~~ 6。

A.C

5. 下列关于树的说法中, 正确的有 _____。
- A. 含有 n 个结点的树, 所有结点的度数之和为 $2(n-1)$ 。
- B. 如果 T 是图 G 的导出子图, 而且又是一棵树, 则称 T 是 G 的一棵支撑树, 简称 G 的树。*支撑/生成*
- C. 完全二叉树所有的叶结点都出现在最低的两层上。
- D. 满二叉树中的任一结点, 如果其右子树的高度为 k , 则其左子树的高度为 k 或 $k-1$ 。

二. 填空题: 本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。

6. 有向图 G 的关联矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{bmatrix}$$

则 G 中节点个数为 5，所有节点的度数和为 14，图 G 中 不存在 (存在/不存在/无法判断) 重边。
(0也算对)

7. 图 3 中的两有向图, 它们 构成 (构成/不构成) 同构关系, 如果构成, 请指出结点间的映射关系; 如果不构成, 请说明理由 $u_1 \rightarrow v_3, u_2 \rightarrow v_4, u_3 \rightarrow v_2, u_4 \rightarrow v_1$

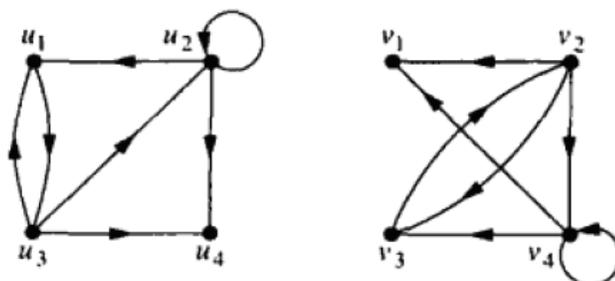


图 3

8. 图 4 无向图 G 中 不存在 (存在/不存在) 欧拉回路, 存在 (存在/不存在) 哈密顿道路。

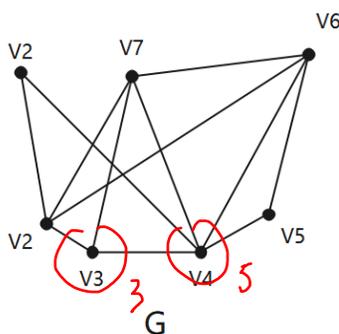
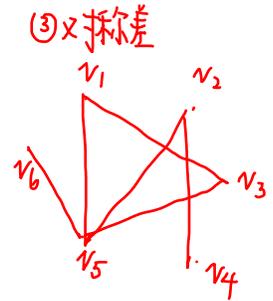
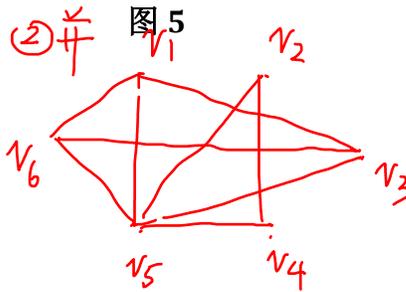
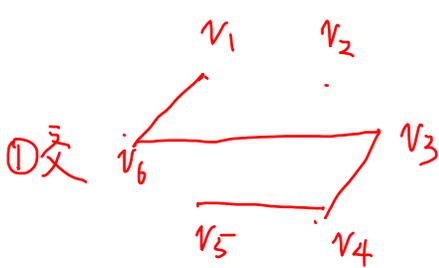
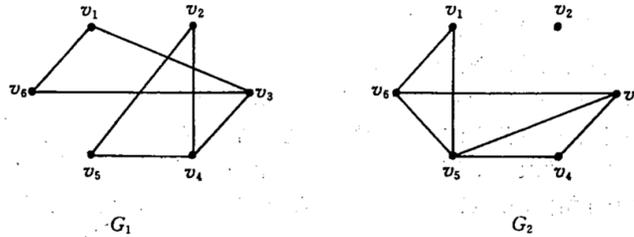


图 4

9. 高度为 k 的完全二叉树, 叶子结点的数量为 $2^{k-2} + m$, m 的范围是 $[0, 2^{k-2}]$, 最低一层的叶子结点的数量为 。
10. 使用哈夫曼树对字符串 "ilovediscretemathes" 进行编码, 得到的哈夫曼树的带权路径总长为 86。
- $\left\{ \begin{array}{l} 1, m=0 \\ 2m+1, \text{ other} \\ 2^{k-1}, m=2^{k-2} \end{array} \right.$

三. 证明和解答题: 本题共 5 小题, 每题 8 分, 共 40 分。

11. 画出图 5 中无向图 G_1, G_2 的交、并、对称差。



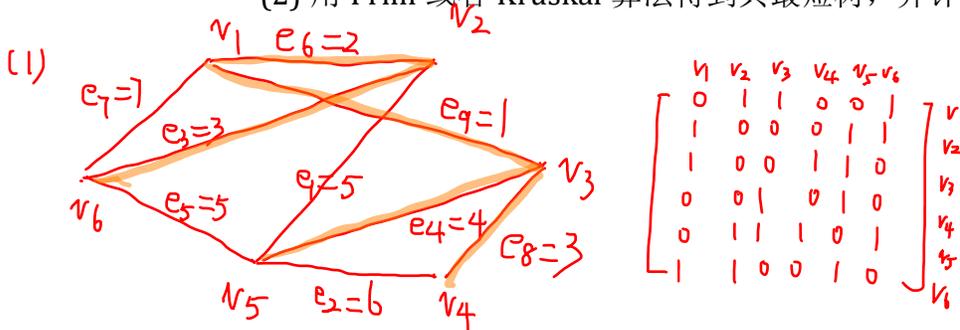
12. 已知无向图 G 的关联矩阵为

$$\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5 \\
 v_6
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 e_1 \\
 e_2 \\
 e_3 \\
 e_4 \\
 e_5 \\
 e_6 \\
 e_7 \\
 e_8 \\
 e_9
 \end{array}$$

给其各边赋值权重 $w(e_1) = 5, w(e_2) = 6, w(e_3) = 3, w(e_4) = 4, w(e_5) = 5, w(e_6) = 2, w(e_7) = 7, w(e_8) = 3, w(e_9) = 1$ 。

(1) 写出图 G 的邻接矩阵。

(2) 用 Prim 或者 Kruskal 算法得到其最短树, 并计算该树中所有边的权值之和。



(2) kruskal $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ 最短树为 13

13. 若无向简单图 G 是欧拉图，证明或反驳：

(1) 当 G 的顶点数是奇数时，若补图 \bar{G} 是连通的，则 \bar{G} 中存在欧拉通路。

(2) 当 G 的顶点数是偶数时，若补图 \bar{G} 是连通的，则 \bar{G} 中存在欧拉通路。

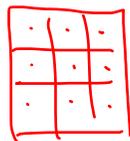
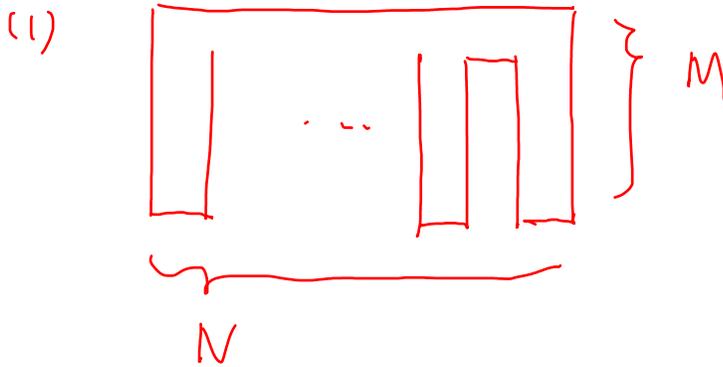
(1) 欧拉图 \rightarrow 度为偶点
 G 的顶点为奇数 $\rightarrow G$ 的补图度为偶数 } $\Rightarrow \bar{G}$ 度为偶数

(2) 证明或者举反例

14. 考虑 $M * N$ 的网格，以其中的方格作为点集，任意两个点之间有边当且仅当对应的两个方格相邻，构成图 G 。

(1) 当 N 是偶数且 $M > 1$ 时，给出一种哈密顿回路的构造方法。

(2) 当 N 和 M 都是大于 1 的奇数时，证明此时 G 没有哈密顿回路。



(2) 方法1: 标色法

方法2:

$$W(G-S) = \frac{MN+1}{2}$$

$$|S| = \frac{MN-1}{2}$$

必要性: G 是 H 图, $S \subseteq V$

$$\Rightarrow W(G-S) \leq |S|$$

第一行取偶数点, 第二行奇数点...

15. 已知引理（教材例 2.1.3）：设 C 是简单图 G 中含结点数大于 3 的一个初级回路。如果结点 v_i, v_j 在 C 中不相邻，而边 $(v_i, v_j) \in E(G)$ ，则称 (v_i, v_j) 是 C 的一条弦。若对每一个 $v_k \in V(G)$ 都有 $d(v_k) \geq 3$ ，则 G 中含有带弦的回路。

证明：在简单图中，若 $n \geq 4$ 且 $m \geq 2n - 3$ ，则 G 中含有带弦的回路。

↓
当 $n=4$ 时, $m \geq 2 \times 4 - 3 = 5$

假设 $n \leq k$ 时, 命题成立

↓
当 $n=k+1$ 时, $m \geq 2(k+1) - 3 = 2k - 1$

① $\exists v_i, d(v_i) = 1$, 剩余的 k 个点 $m' \geq 2k - 1 - 1 = 2k - 2$

② $\exists v_i, d(v_i) = 2$, 连接相邻的两个点

③ $\forall v_i, d(v_i) \geq 3 \Rightarrow$ 引理.