

2020 年秋 《离散数学》 图论测试

姓名: _____ 学号: _____ 成绩: _____

一. 不定项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 每小题有多个选项符合题意, 全部选对的得 4 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错或不答的得 0 分.

1. 下列关于图的基本概念的说法中, 正确的有 **BC**.
- A. 在有向图 G 中, 每个结点 v 的正度和负度相等, 所有结点的正度之和等于所有结点的负度之和.
 - B. 已知图 $G = (V, E), G' = (V', E')$. 如果 G' 是 G 的生成子图, 那么 $V = V'$.
 - C. 从图 G 中删除某个点 v 和与其相连接的边, 得到的图 $G' = G - v$ 是图 G 的导出子图.
 - D. 如果图 G 和 G' 不同构, 那么它们不存在同构的导出子图.

2. 下列关于图的代数表示的说法中, 正确的有 **AD**.

A. 无向图的邻接矩阵是一个对称矩阵.

B. 有向图 G 如图 1 所示, 它的邻接矩阵表示为
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

C. 关联矩阵能够表示自环, 但不能表示重边.

D. 已知有向图 $G = (V, E)$, 它的关联矩阵第 i 行非零元的数目恰是结点 v_i 的度, 第 i 行所有元素之和为结点 v_i 的正度与负度之差.

3. 下列关于道路与回路的说法中, 正确的有 **BCD**.

A. 在图 G 中, 如果道路 L 是一条简单道路, 那么在 L 中不存在重复出现的结点.

B. 图 G 的极大联通子图是不唯一的, 而且每个极大联通子图 H 都是 G 的导出子图.

C. 图 2 中 (a) (b) (c) 三张图的连通支的个数分别为 1, 2, 3.

D. 如果二分图中出现回路, 那么该回路一定由偶数条边组成.

4. 下列关于树和森林的说法中, 正确的有 **AB**.

A. 删除树的任意一条边可以将其分成两个不连通的分支, 每个分支都是原来

树的导出子图.

- B. 高度为 k 的满二叉树的叶子结点的个数 2^{k-1} .
- C. 完全二叉树的叶子结点均位于该二叉树的最低层.
- D. 一棵有 n 个叶子结点的 Huffman 树共有 $2n + 1$ 个结点.

二. 填空题: 本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分.

1. [1+1+2] 有向图 G 的邻接矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 G 中结点个数为 **5**, 边的条数为 **10**, 图 G 中 **存在** (存在/不存在/无法判断) 自环.

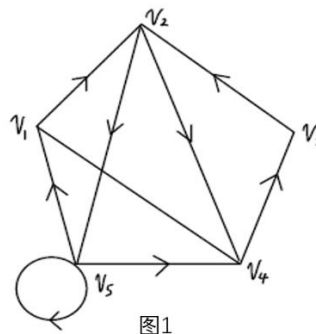
2. [2*2] 图 3 中 **存在** (存在/不存在) 欧拉回路, **存在** (存在/不存在) 哈密顿回路.

3. [1+3] 图 4 中的 G_1 与 G_2 均为有向图, 它们 **构成** (构成/不构成) 同构关系, 如果构成请指出结点间的映射关系; 如果不构成, 请说明理由 **_____**

$f: u_1 \rightarrow v_2, u_2 \rightarrow v_4, u_3 \rightarrow v_6, u_4 \rightarrow v_5, u_5 \rightarrow v_1, u_6 \rightarrow v_3$ _____.

4. [2*2] 一棵高度为 k 的完全二叉树的叶子结点个数的范围为 **$[2^{k-2}, 2^{k-1}]$** . 在一棵完全二叉树中, 某结点的右子树的高度为 k , 其左子树的高度为 **k 或者 $(k+1)$** .

5. [4] 使用哈夫曼树对字符串 "ihaveapenihaveanapple" 进行编码, 得到的哈夫曼树的带权路径总长为 **61**.



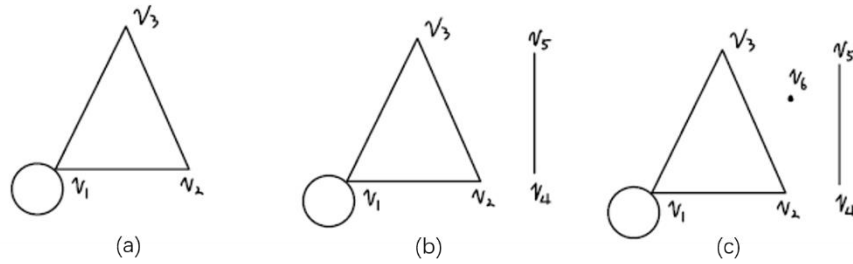


图2

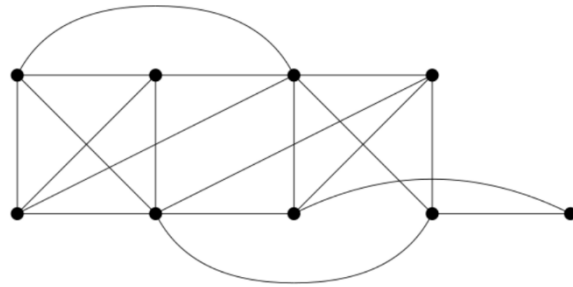


图3

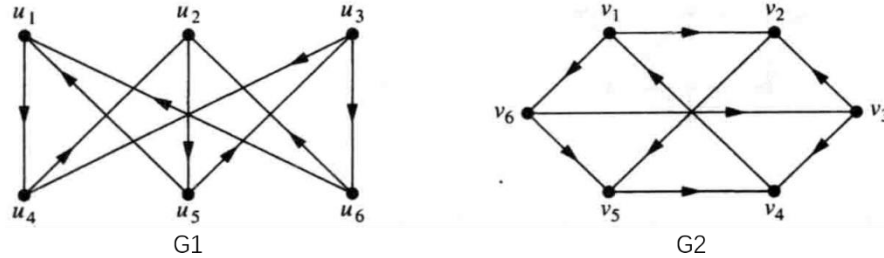


图4

三. 证明和解答题: 本题共 3 小题, 共 24 分.

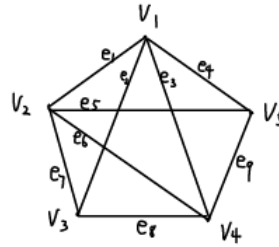
1. 已知无向图 G 的关联矩阵为
- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{bmatrix}.$$

- (1) 画出图 G , 写出 G 的邻接矩阵. (4 分) [画出图 2 分, 邻接矩阵 2 分]
 (2) 给图 G 的各边赋值权重生成图 G' , 其中 $w(e_1) = 5, w(e_2) = 7, w(e_3) = 4, w(e_4) = 2, w(e_5) = 5, w(e_6) = 3, w(e_7) = 7, w(e_8) = 4, w(e_9) = 5$. 求图 G' 最小生成树, 并计算该树中所有边的权值之和. (4 分) [过程 2 分, 生成树 1 分, 权值之和 1 分. (有过程但是忘记明确写生成树也给满分)]

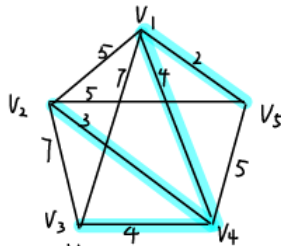
解: (1)

关联矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



(2)



使用Kruskal算法, 设最短树为T.

① $T \leftarrow e(V_1, V_2)$

② $T \leftarrow e(V_2, V_4)$

③ $T \leftarrow e(V_1, V_4)$

④ $T \leftarrow e(V_3, V_4)$ (③, ④两步可以调换顺序)

权值之和为 $2+3+4+4=13$.

2. 证明: 二分图 $G = \langle X, Y \rangle$, X 与 Y 是其二分的结点子集. 证明: 如果 G 为哈密顿图, 那么 $|X| = |Y|$. (8分) [合理即可, 按照 0, 2, 4, 6, 8 分级评分]

证明: 不妨设 G 中一条H回路 $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ 且 v_1 与 v_n 相连, 再设

$v_1 \in X$

$\because v_1, v_2$ 相连, G 为二分图

$\therefore v_2 \in Y$

$\because v_2, v_3$ 相连, G 为二分图

$\therefore v_3 \in X$

同理可知, $v_1, v_3, \dots, v_{2k+1} \in X, v_2, v_4, \dots, v_{2k} \in Y$

如果 n 为奇数, 那么 $v_1 \in X, v_n \in X$ 这和 v_1 与 v_n 相连矛盾

所以为偶数, $v_1, v_3, \dots, v_{n-1} \in X, v_2, v_4, \dots, v_n \in Y$

$\therefore |X| = |Y| = \frac{n}{2}$

3. 在约克阿尔昆(735-804)提出的一个古老智力游戏中, 一位农夫需要将一匹狼、一只山羊和一棵白菜带过河. 农夫只有一只小船, 小船每次只能载农夫和一件物

品(一只动物或者白菜).农夫可以重复渡河,但如果农夫在河的另一边.那么狼会吃羊,类似地,羊会吃白菜.

可以通过列出两岸各有什么来描述问题的每个状态.例如,可以用有序对(FG,WC)表示农夫和羊在一岸,而狼和白菜在另一岸的状态.[F表示农夫,G表示山羊,W表示狼,C表示白菜, \emptyset 表示岸上什么也没有.问题的初始状态就是(FGWC, \emptyset .)

(1) 找出这个游戏所有的允许状态,其中不能出现在没有农夫的情况下,让狼和羊,或者羊和白菜在同一岸上.(3分)

(2) 构造一个图,使得图中的每一个顶点表示一个允许的状态,如果可以通过一次船的运输从一个状态转换到另一个状态,那么相应的顶点之间用一条边相连.(3分)

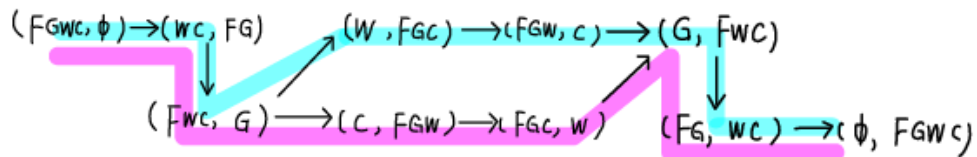
(3) 找出这个游戏的两个不同解,每个解都使用7次渡河.(2分)

解: (1) 不考虑约束条件共 $2^4=16$ 种状态

(FGWC, \emptyset)	(FG, WC)	(F, WGC)
(FGW, C)	(FW, GC)	(G, FWC)
(FGC, W)	(FC, WG)	(W, FGC)
(FWC, G)	(WC, FG)	(C, FGW)
(GWC, F)	(GC, FW)	(\emptyset , FGWC)
	(WG, FC)	

删去不满足题意的情况,共10种状态.

(2)



(3) 两种方案如上图所示.