上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

SJTU

第一次习题课

施宏建

2024年10月23日

01

基本概念

- 知识点总结
- 复习题
- 课后作业

知识点总结

基本定义

- 图
- 度
  - 结点关联的边数
  - 自环对度的贡献是2
- 简单图：无重边无自环的无向图
- 赋权图/正权图
- 支撑子图/生成子图，导出子图
- 图的并、交和对称差
- 直接后继集/直接前趋集
- 同构

基本性质

- 结点和边的数量关系
- 奇数度的结点数量为偶数个
- 正度之和等于负度之和
- 完全图的边数
- 非空简单图存在度相同的节点

同构的必要条件

- 结点数量与边数量各自相等；
- 度的非增序列相同；
- 存在同构的导出子图。

知识点总结

- 邻接矩阵
  - 有向图

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_i,v_j)\in E\\ 0, & else\end{cases}$$

  - 无向图
    - 对称矩阵

- 关联矩阵
  - 有向图

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k)\in E\\ -1, & e_j=(v_k,v_i)\in E\\ 0, & else\end{cases}$$

  - 无向图

	邻接矩阵	关联矩阵
结点数量	矩阵的行数/列数	矩阵的行数
边数量	非零元素数量（有向图）	矩阵的列数
表示自环	能	不能
表示重边	不能	能

复习题

- 简单图：无重边、无自环的无向图

下列关于简单图，下列说法错误的是

简单图没有自环		0 %
空图是简单图	3 位答题者	6 %
简单图没有重边		0 %
简单图都是无向图	48 位答题者	**92 %** ✓
无答案	1 位答题者	2 %

课后作业

节点的度

完全图的每边任给一个方向，称为有向完全图。证明在有向完全图中

$$\sum_{v_i \in V}(d^+(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V}(d^-(v_i))^2 .$$

注意$d(v_i)$指的是节点的度

$$d^+(v_i) + d^-(v_i) = n - 1$$

$$\sum_{v_i \in V} d^+(v_i) = \sum_{v_i \in V} d^-(v_i) = m = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{V_i \in V}[d^+(v_i)]^2 - \sum_{V_i \in V}[d^-(v_i)]^2$$

$$= \sum_{V_i \in V}[d^+(v_i) - d^-(v_i)]\underbrace{[d^+(v_i) + d^-(v_i)]}_{n-1}$$

$$= (n-1)\sum_{V_i \in V}[d^+(v_i) - d^-(v_i)]$$

$$= (n-1)\left[\sum_{V_i \in V} d^+(v_i) - \sum_{V_i \in V} d^-(v_i)\right]$$

$$= 0$$

图的性质 1.1.3

课后作业

节点的度

证明 9 个人中若非至少有 4 个人互相认识，则至少有 3 个人互相不认识。

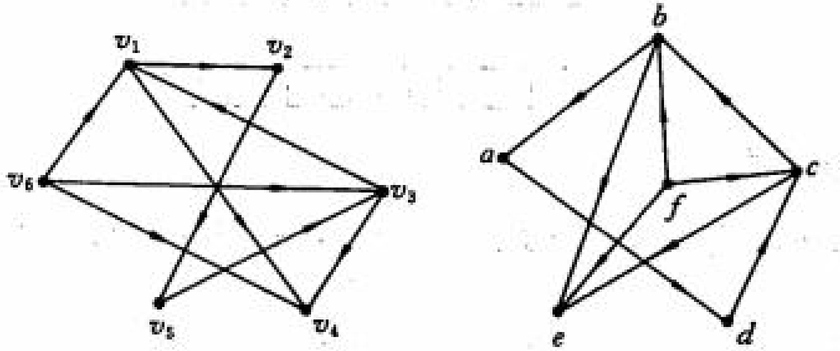
引理:六个人中必有三个人相互认识或相互不认识。 (拉姆塞定理)

引理证明：
1. 设其中一人为A。 若A认识其中三个人，则若三个人之间相互不认识，得证。若三人之中有两人相互认识，则加上A，三人相互认识。
2. 若A不认识其中三个人，则若三个人之间相互认识，得证。若三人之中有两人相互不认识，则加上A，三人相互不认识。

证明:
1. 若九个人中存在一个人不认识其中四个人，设其为A。则若四个人相互认识，存在4个人相互认识；若四个人中有两人相互不认识，则加上A，存在3个人相互不认识。
2. 若全部九个人都认识至少五个人，则至少有一个人认识至少六个人(图中度为奇数的节点必有偶数个)。则由引理：六个人中有三人互相认识，加上A就有4个人相互认识；或者六个人里有三个人互不认识。得证。

课后作业

- 邻接矩阵、关联矩阵

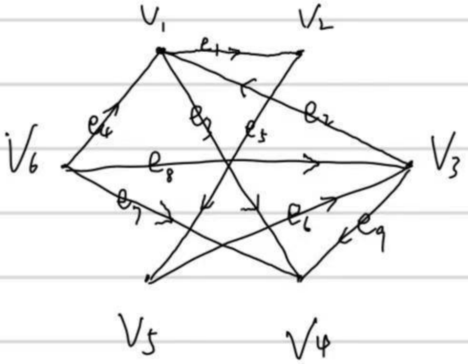


题图 1.7

写出题图 1.7(a)的邻接矩阵、关联矩阵,边列表及正向表。

邻接矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&0\end{bmatrix}$$



关联矩阵

$$B=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&0&0&0&0&0\\-1&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&-1&1\\0&0&-1&0&0&0&-1&0&-1\\0&0&0&0&-1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&1&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6&e_7&e_8&e_9\end{matrix}\end{array}$$

02

道路与回路

- 知识点总结
- 复习题
- 课后作业

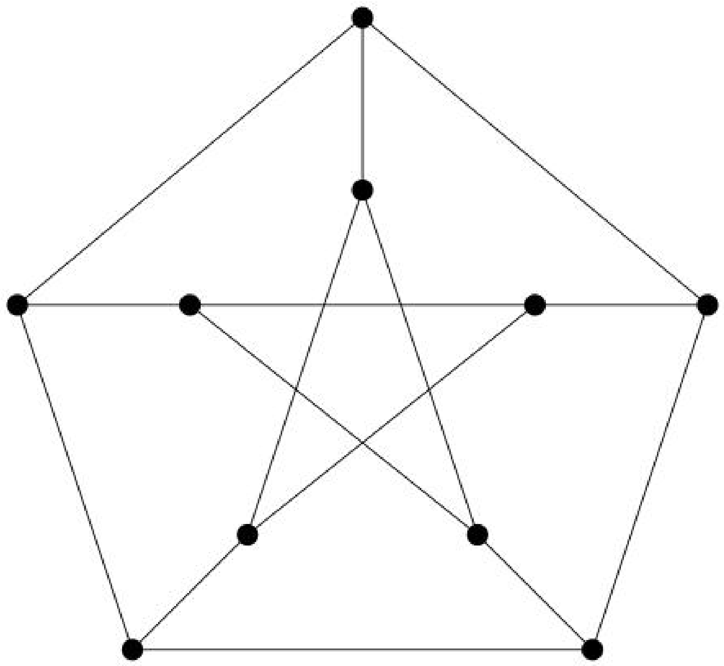
知识点总结

- 道路与回路
  - 道路、简单道路、初级道路
  - 回路、简单回路、初级回路
  - 连通图、极大联通子图（不止一个）
- 欧拉道路与回路
  - 定义：经过所有边的简单道路（回路）
  - 充要条件
- 哈密顿道路与回路
  - 定义：经过所有点的初级道路（回路）
  - 充分性定理
- 数学归纳法
- 反证法

复习题

- 哈密尔顿道路（回路）

图G_9是著名的Petersen图。尝试通过穷举判断该图中是否存在哈密尔顿道路(Hamilton path)和哈密尔顿回路(Hamilton circuit)?



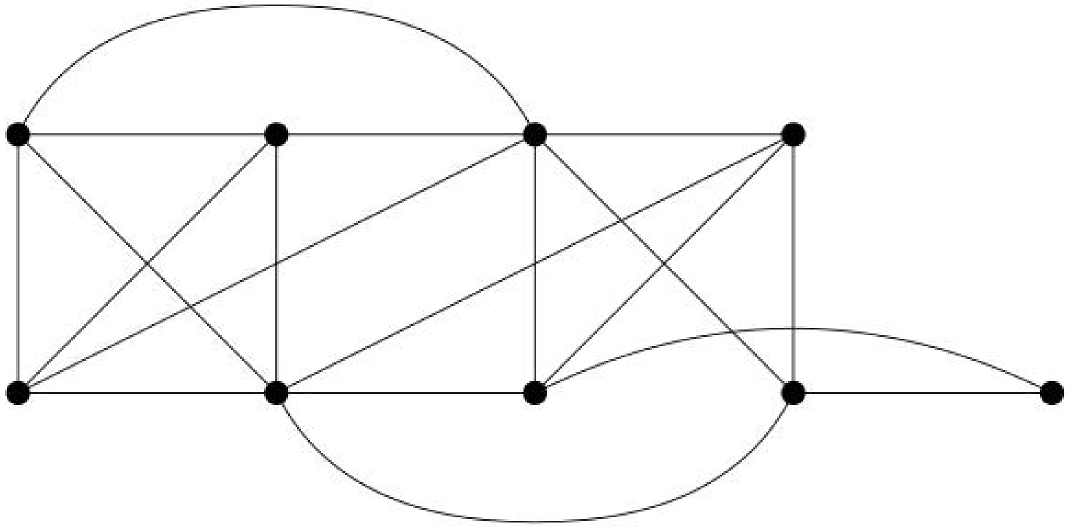
The Graph G_9

存在哈密尔顿回路，但没有哈密尔顿道路	1 位答题者	2 %
哈密尔顿道路和哈密尔顿回路均不存在	6 位答题者	12 %
存在哈密尔顿道路和哈密尔顿回路	2 位答题者	4 %
存在哈密尔顿道路，但没有哈密尔顿回路	42 位答题者	82 %

复习题

- 欧拉道路（回路）：奇度节点数量

图G_7中是否存在欧拉道路和欧拉回路?



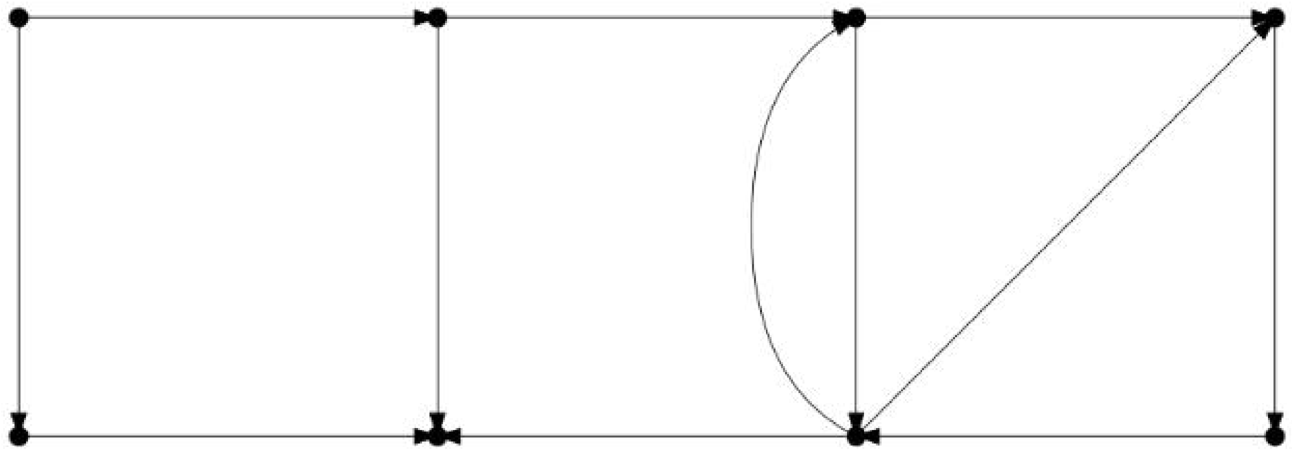
The Graph G_7

存在欧拉道路和欧拉回路	46 位答题者	90 %	✓
欧拉回路和欧拉道路均不存在		0 %	
存在欧拉回路，但不存在欧拉道路	1 位答题者	2 %	
存在欧拉道路，但不存在欧拉回路	3 位答题者	6 %	
无答案	1 位答题者	2 %	

复习题

- 强连通分支：分支内两两节点相互可达

有向图G_5中，有多少强连通分支?



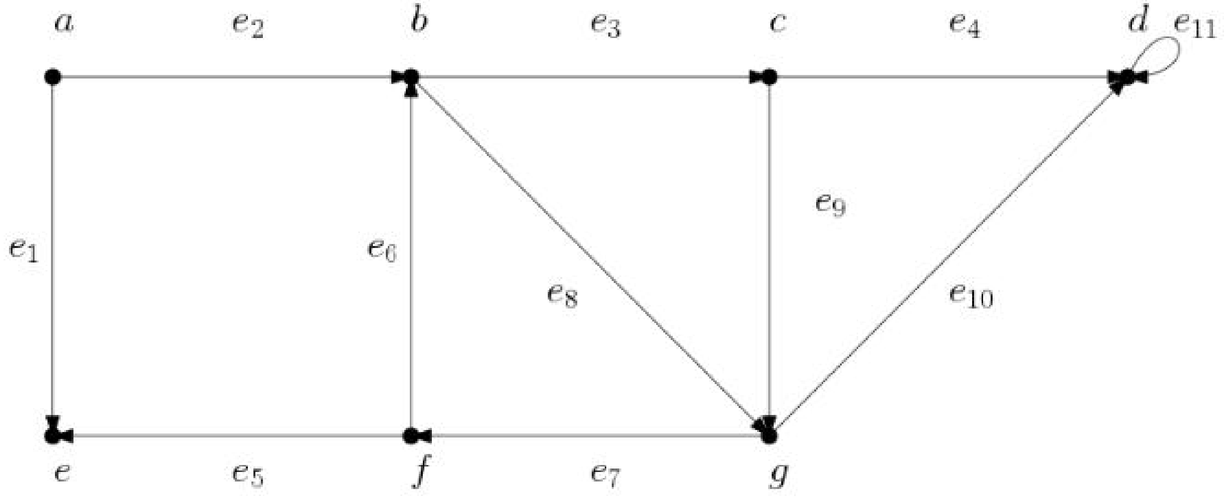
The Graph G_5

6	3 位答题者	6 %	
4	1 位答题者	2 %	
5	42 位答题者	82 %	✓
3	4 位答题者	8 %	
无答案	1 位答题者	2 %	

复习题

- 强连通分支：分支内两两节点相互可达

在有向图G_4中，有多少强连通分支?



The Graph G_4

其中a,b,c,d,e,f,g为结点，e_i为边

2	4 位答题者	8 %	
5	1 位答题者	2 %	
3	4 位答题者	8 %	
4	41 位答题者	80 %	✓
无答案	1 位答题者	2 %	

课后作业

连通图

证明 G 和 $\overline{G}$ 至少有一个是连通图。

设 G 不连通.

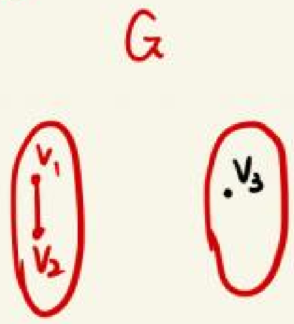
对任意两点 v_1 v_2.

若 $(v_1,v_2) \notin E(G)$, 则 $(v_1,v_2) \in E(\overline{G})$, 即 v_1、v_2在$\overline{G}$中连通

若 $(v_1,v_2) \in E(G)$, 那么在另一个连通分支中找一点 v_3

在$\overline{G}$中 (v_1,v_3) (v_2,v_3) 必存在. 即 v_1,v_2 在$\overline{G}$中连通

↓



∴ 若 G 不连通

$\overline{G}$ 中任意两点都连通.

课后作业

连通图的最长道路

证明：若连通图的最长道路不唯一，则它们必定相交。

假设连通图 G 有两条不相交最长道路

$L_1=(v_{10}, e_{11}, v_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n}, v_{1n})$, $L_2=(v_{20}, e_{21}, v_{21}, e_{22}, \dots, e_{2n}, v_{2n})$

由于 L_1, L_2 不相交，则对 $\forall i,j=1,2,\dots,n$ 有 $e_{1i}\neq e_{2j}$.

由于 G 连通，则 $\exists i,j=0,1,2,\dots,n$ 使得 v_{1i} 与 v_{2j} 之间有道路 $L_3=(v_{1i}, e_1, v_2, e_2, \dots, e_m, v_{2j})$

其中对 $\forall p,q=1,2,\dots,n$ 及 $k=1,2,\dots,m$ 有 $e_k\neq e_{1p}$ 且 $e_k\neq e_{2q}$

此时，令 $L_{11}=(v_{10}, e_{11}, v_{11}, e_{12}, \dots, v_{1i})$, $L_{12}=(v_{1i}, e_{1i}, \dots, e_{1n}, v_{1n})$

$L_{21}=(v_{20}, e_{21}, v_{21}, e_{22}, \dots, v_{2j})$, $L_{22}=(v_{2j}, e_{2j}, \dots, e_{2n}, v_{2n})$

则不妨设 L_{11} 长度 $l_{11}\geq \frac{n}{2}$, L_{22} 长度 $l_{22}\geq \frac{n}{2}$，而 L_3 长度 $l_3\geq 1$

故有道路 $L_4=(v_{10}, e_{11}, v_{11}, e_{12}, \dots, v_{1i}, e_1, v_2, e_2, \dots, e_m, v_{2j}, e_{2j}, \dots, e_{2n}, v_{2n})$

的长度 $l_4=l_{11}+l_{22}+l_3\geq \frac{n}{2}+\frac{n}{2}+1=n+1$，比 L_1 及 L_2 长，矛盾

故 L_1, L_2 必相交

课后作业

带弦回路

在简单图中，证明：若 $n \geq 4$ 且 $m \geq 2n-3$，则 G 中含有带弦的回路。

1° 当 $n=4$ 时，$m \geq 5$，此时 G 中含带弦回路

2° 若 $n=k$ 时成立，则当 $n=k+1$ 时，对 G 中极长初级道路 L，设其一端点为 v_0，则

① 若 $d(v_0) \geq 3$，假设 $\exists v_1$ 与 v_0 相连且 $v_1 \notin V(L)$，则 $\{v_1, L\}$ 为更长道路，矛盾。故 v_0 邻点均在 L 上，此时 $\exists$ 带弦回路

② 若 $d(v_0) < 3$，则 $E(G-\{v_0\}) \geq m-2 = 2(k+1)-3-2$ $= 2k-3$，此时 $G-\{v_0\}$ 含带弦回路

综合 1°，2° 有 G 含带弦回路

哈密尔顿回路

设 G 是 $n \geqslant 3$ 的简单图，证明：若 $m \geqslant \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$，则 G 存在 H 回路。

若 $\exists v_i, v_j \in V(G)$ 使得 $d(v_i)+d(v_j)<n$.

则 $E(G-\{v_i,v_j\}) > m-n = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2-n$

$= \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3 = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$

而 $E(G-\{v_i,v_j\}) \leq K_{n-2} = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$

矛盾，故对 $\forall v_i, v_j \in V(G)$，均有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$

由推论2.4.1有 G 存在 H 回路

课后作业

哈密尔顿道路

设 G 是有向完全图，证明 G 中存在有向的哈密顿道路。

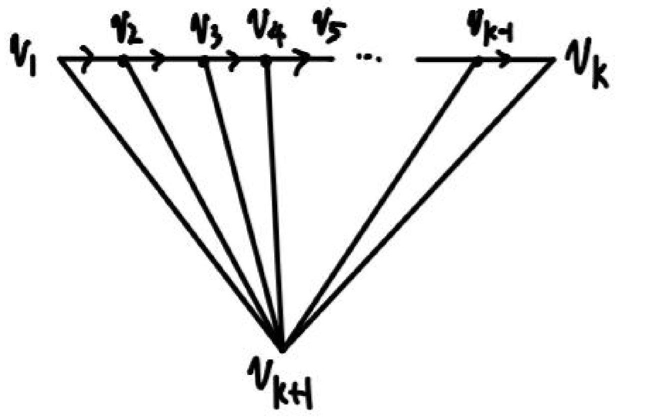
注意数学归纳法的要点：
1. 初始条件
2. 推导条件

$n=3$时，三个点的有向完全图存在H道路

假设 $n\le k$时，G中存在H道路

当$n=k+1$时，删除v_{k+1}剩下的图是结点数为k的有向完全图

设这k个点中存在H道路 $v_1\to v_2\to v_3 \cdots \to v_k$



证明 (v_{k+1}, v_1)或者(v_k, v_{k+1})或者存在(v_i, v_{k+1})和(v_{k+1}, v_{i+1})

课后作业

哈密尔顿回路

在例 2.4.5 中，若 $n \geq 4$，证明这 n 个人一定可以围成一圈，使相邻者互相认识。

例 2.4.5 设 $n(\geq 3)$ 个人中，任两个人合在一起都认识其余 $n-2$ 个人。证明这 n 个人可以排成一队，使相邻者都互相认识。

证明：每个人用一个结点表示，相互认识则用边连接相应的结点，于是得到简单图 G。若 G 中有 H 道路，则问题得证。由已知条件，对任意两点 $v_i, v_j \in V(G)$，都有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n-2$。此时若 v_i 与 v_j 相识，即 $(v_i, v_j) \in E(G)$，则 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$；若不相识，必存在 $v_k \in V(G)$，满足 $(v_i, v_k), (v_j, v_k) \in E(G)$。否则，设 $(v_i, v_k) \notin E(G)$，就出现 v_k, v_j 合在一起不认识 v_i，与原设矛盾。因此也有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n-1$。综上由定理 2.4.1，G 中存在 H 道路。

定理 2.4.1 如果简单图 G 的任意两结点 v_i, v_j 之间恒有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n-1$，则 G 中存在哈密顿道路。

推论 2.4.1 若简单图 G 的任意两结点 v_i 和 v_j 之间恒有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$，则 G 中存在哈密顿回路。

SJTU

03

树

- 知识点总结
- 复习题
- 课后作业

SJTU

知识点总结

- 树的有关定义
  - 树的定义：不含回路的连通图
  - 割边
  - 支撑树
- 哈夫曼树
- 最短树
  - Kruskal 算法
  - Prim 算法
- 补充：二叉树
  - 满二叉树
  - 完全二叉树

复习题

尝试次数：32 次，共 35 次

假如有A,B,C,D四个字符，出现的频率分别为60%, 25%, 10%, 5%，各字符的哈夫曼编码为：A [[question_913054_ ，B [[question_913054_ ，C [[question_913054_ ，D [[question_913054_ 。

1 2 3 4

000	10 位答题者	29 %	✓
111	15 位答题者	43 %	✓
其他事情	7 位答题者	20 %	
无答案	3 位答题者	9 %	

1	15 位答题者	43 %	✓
0	17 位答题者	49 %	✓
无答案	3 位答题者	9 %	

01	13 位答题者	37 %	✓
10	18 位答题者	51 %	✓
无答案	3 位答题者	9 %	
其他事情	1 位答题者	3 %	

001	10 位答题者	29 %	✓
110	15 位答题者	43 %	✓
其他事情	7 位答题者	20 %	
无答案	3 位答题者	9 %	

复习题

树是极大的不含回路的连通图。

True	31 位答题者	89 %	✓
False	2 位答题者	6 %	
无答案	2 位答题者	6 %	

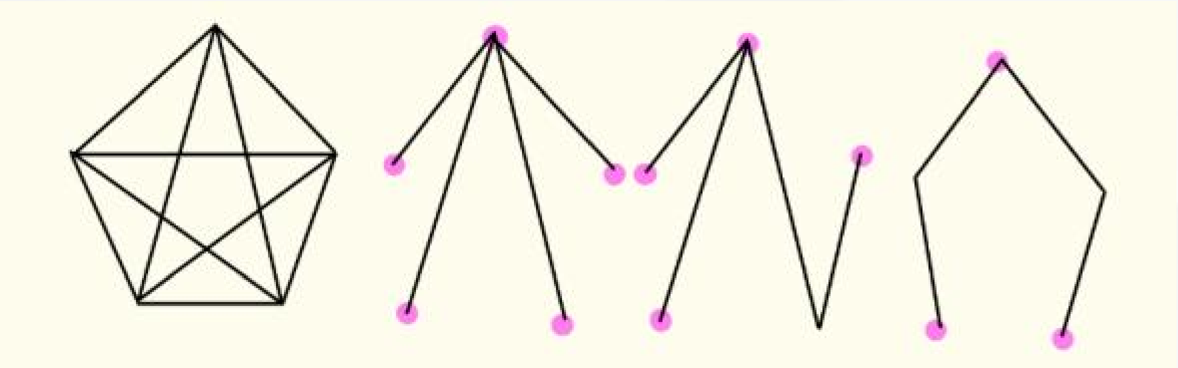
复习题

{ 0, 10, 110,1011, 1111 }是前缀码。

True	5 位答题者	14 %
False	29 位答题者	83 % ✓
无答案	1 位答题者	3 %

复习题

- 同构：G1和G2顶点度的非增序列相同
- 树：无回路，连通
  - 11114
  - 11123
  - 11222



5个结点的完全图G，其不同构的生成树的个数是（　）

4	2 位答题者	6 %
8	9 位答题者	26 %
3	21 位答题者	60 %
16	1 位答题者	3 %
无答案	2 位答题者	6 %

复习题

存在一棵含有19个结点，8个叶子结点的哈夫曼树。

True	2 位答题者	6 %	
False	31 位答题者	89 %	✓
无答案	2 位答题者	6 %	

复习题

- 哈夫曼树没有正度为1的结点：正度=出度，树的方向从上到下

在Huffman 树中没有正度为1的结点。

True	29 位答题者	83 %	✓
False	4 位答题者	11 %	
无答案	2 位答题者	6 %	

复习题

下面哪种图不一定是树：

连通且有n-1条边		0 %	
任意两个结点间有道路	30 位答题者	86 %	✓
不含任何回路的连通图		0 %	
有n-1条边且无回路	3 位答题者	9 %	
无答案	2 位答题者	6 %	

复习题

树中一定存在树叶结点。

True	29 位答题者	83 %	✓
False	4 位答题者	11 %	
无答案	2 位答题者	6 %	

复习题

- 强连通：两两节点相互可达

含有n(n>1)个结点的强连通有向图，至少有（　　）条边。

n	26 位答题者	74 % ✓
2n	1 位答题者	3 %
n-1	6 位答题者	17 %
n+1		0 %
无答案	2 位答题者	6 %

复习题

一棵有n个叶子的Huffman树共有（　　）个结点。

2n-1	30 位答题者	86 %	✓
2*n-1		0 %	✓
其他事情	3 位答题者	9 %	
无答案	2 位答题者	6 %	

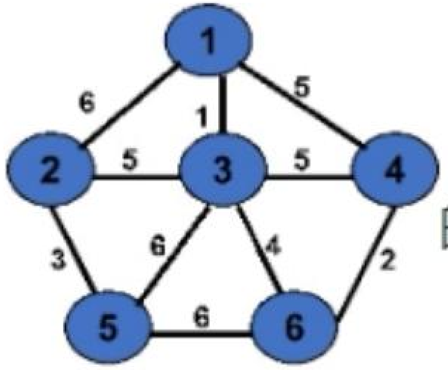
复习题

对权值 W = {1, 3, 7, 8, 14, 20, 28}，建立哈夫曼树，其带权路径长度为（ ）。

196	31 位答题者	89 %	✓
81	2 位答题者	6 %	
无答案	2 位答题者	6 %	

复习题

最短树：Kruscal/Prim算法



图G

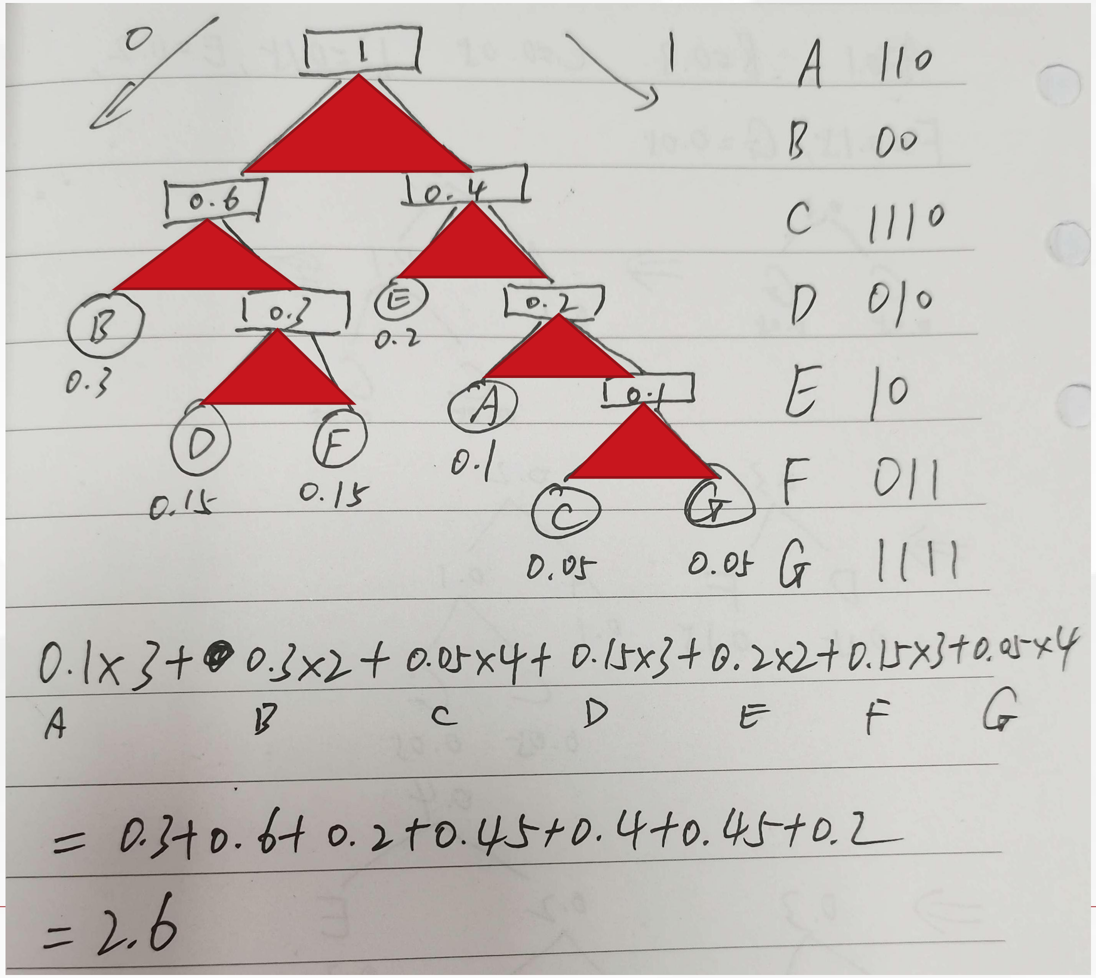
的最短树的权之和为（ ）。

		0 %	✓
		0 %	✓
		0 %	✓
15	29 位答题者	83 %	✓
其他事情	4 位答题者	11 %	
无答案	2 位答题者	6 %	

课后作业

Huffman树

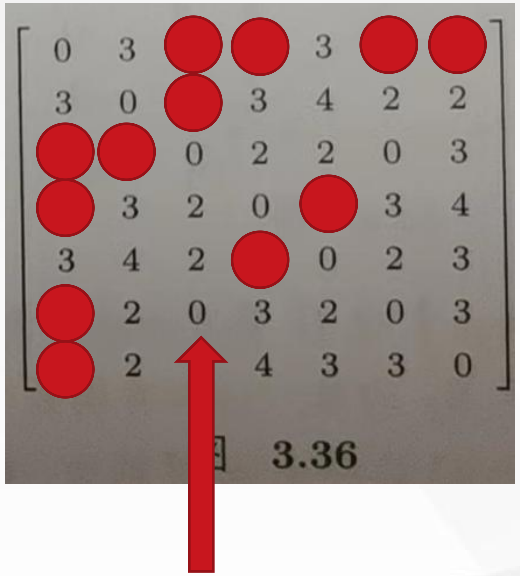
32.【★☆☆☆】假设数据项 A，B，C，D，E，F，G 以下面的概率分布出现：$A:0.1$，$B:0.3$，$C:0.05$，$D:0.15$，$E:0.2$，$F:0.15$，$G:0.05$，求一种二进制编码方式使得传输一个数据项的期望长度最小，并求其期望。

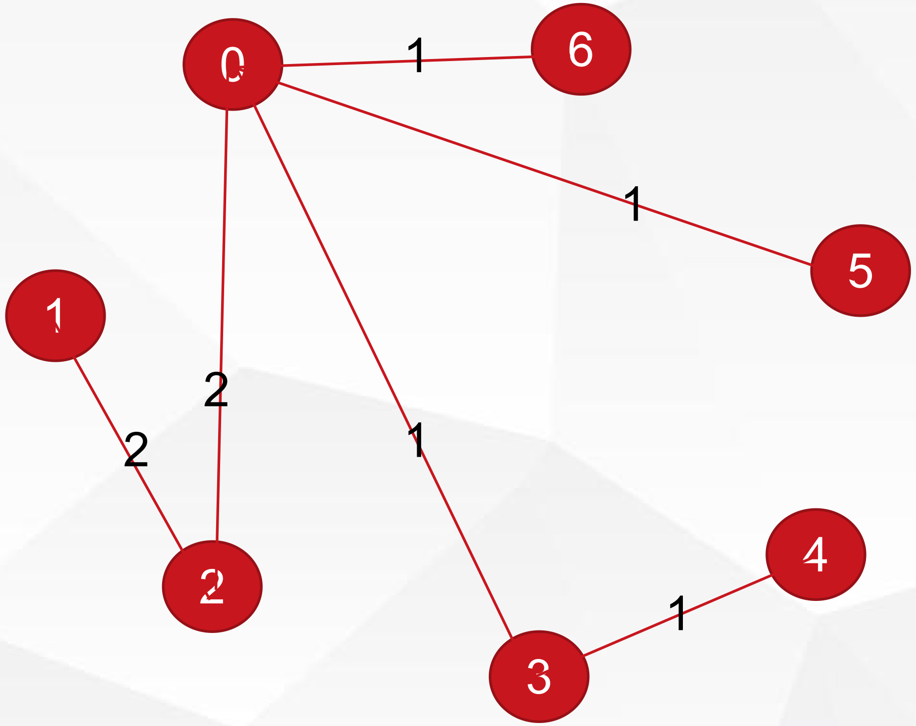


课后作业

最短树

求权矩阵所示带权图中（见图 3.36）的最短树的边权之和。





最终边权和为8

04

补充题

课堂小测

已知无向图 G 的邻接矩阵为

$$
\begin{bmatrix}
0 & 3 & 0 & 8 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\
2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0
\end{bmatrix}
$$

(1) 作出图 G，写出图 G 的关联矩阵表示或者说明不能使用关联矩阵表示的原因。（4 分）

(2) 用 Prim 或者 Kruskal 算法得到其最短树，并计算该树中所有边的权值之和。（4 分）

课堂小测

证明：完全图$K_{2k-1}(k \geq 1)$中同时有 k 条边不重的哈密顿回路，且这 k 条边不重的哈密顿回路含K_{2k-1}中所有边。其中边不重的哈密顿回路定义如下：设C_1与C_2都是图 G 的哈密顿回路, 若 $E(C_1) \cap E(C_2) = \emptyset$，则称它们为边不重的哈密顿回路。（8 分）

3. 假设数据项 A,B,C,D,E,F,G 以下面的概率分布出现：

A：0.2，B：0.2，C：0.05，D：0.1，E：0.1，F：0.2，G：0.15，

求一种二进制编码方式使得传输一个数据项的期望长度最小，并求其期望。

Q&A

饮 水 思 源　爱 国 荣 校