第5章　谓词逻辑的等值和推理演算

- 谓词逻辑研究的对象是重要的逻辑规律，普遍有效式是最重要的逻辑规律
- 等值和推理演算是谓词逻辑的基本内容
- 同命题逻辑相比，由于量词谓词的引入，使谓词演算有着广泛的应用
- 这章的讨论，主要是以语义的观点进行的非形式的描述，而严格的形式化的讨论见第6章所建立的公理系统

5.1 否定型等值式

- 若给定了两个谓词公式A，B，说A和B是等值的，如果在公式A，B的任一解释下，A和B都有相同的真值
  在谓词逻辑中，需要给出解释的内容包括(见P65):
  (1) 论域
  (2) 谓词变项
  (3) 命题变项
  (4) 函数
  (5) 自由个体
- 等价的说法:
  A，B等值当且仅当A↔B是普遍有效的公式
  记作A＝B或A⇔B

5.1.1 由命题公式移植来的等值式

- 若将命题公式的等值式，直接以谓词公式代入命题变项便可得谓词等值式．由

  $\neg\neg p = p$, $p \to q = \neg p \vee q$, $(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

  可得

  1. $\neg\neg P(x) = P(x)$
  2. $\neg\neg(\forall x)P(x) = (\forall x)P(x)$
  3. $P(x) \to Q(x) = \neg P(x) \vee Q(x)$
  4. $(\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x) = \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$
  5. $(P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x) = (P(x) \vee R(x)) \wedge (Q(x) \vee R(x))$
  6. $((\forall x)P(x) \wedge Q(y)) \vee (\exists z)R(z)$

     $= ((\forall x)P(x) \vee (\exists z)R(z)) \wedge (Q(y) \vee (\exists z)R(z))$

5.1.2 否定型等值式(摩根律的推广)

$\neg(\forall x)P(x)=(\exists x)\neg P(x)$

$\neg(\exists x)P(x)=(\forall x)\neg P(x)$

- 形式上看这对公式，是说否定词” ¬”可越过量词深入到量词的辖域内，但要把所越过的量词∀转换为∃，∃转换为∀

(1)从语义上说明

- $\neg(\forall x)P(x)$语义上表示的是，并非所有的x都具有性质P．这相当于，有一个x不具有性质P，这正是$(\exists x)\neg P(x)$的含义.
- 由语义分析知$\neg(\forall x)P(x)$ 与$(\exists x)\neg P(x)$表示的是同一命题，自然有

  $\neg(\forall x)P(x)=(\exists x)\neg P(x)$

  $(\forall x)P(x)=\neg (\exists x)\neg P(x)$
- 类似的有$\neg(\exists x)P(x)=(\forall x)\neg P(x)$

  $(\exists x)P(x)=\neg(\forall x)\neg P(x)$

说明

- $\neg(\forall x)P(x)$与$(\forall x)\neg P(x)$不等值
  如$P(x)$表示x是有理数
  前者的语义是并非所有的x都是有理数
  后者的语义是说所有的x都不是有理数
  这两句话是不同的
- $\neg(\exists x)P(x)$与$(\exists x)\neg P(x)$也不等值
  $\neg(\exists x)P(x)=(\forall x)\neg P(x)$
  $(\exists x)\neg P(x)=\neg(\forall x)P(x)$

(2)在{1，2}域上分析

- $\neg(\forall x)P(x)$
  $=\neg(P(1)\wedge P(2))$
  $=\neg P(1)\vee\neg P(2)$
  $=(\exists x)\neg P(x)$
- $\neg(\exists x)P(x)$
  $=\neg(P(1)\vee P(2))$
  $=\neg P(1)\wedge\neg P(2)$
  $=(\forall x)\neg P(x)$

(3)语义上的证明

- 依等值式定义，A=B如果在任一解释I下A真B就真，而且B真A就真.

  若证明 $\neg(\forall x)P(x)=(\exists x)\neg P(x)$

  1. 设任一解释I下有 $\neg(\forall x)P(x)=T$

  从而 $(\forall x)P(x)=F$，即有一个 $x_o \in D$，使 $P(X_o)=F$

  于是 $\neg P(x_o)=T$

  故在I下 $(\exists x)\neg P(x)=T$

  2. 反过来，设任一解释I下有 $(\exists x)\neg P(x)=T$

  即有一个 $x_o \in D$，使 $\neg P(X_o)=T$

  从而 $P(X_o)=F$

  于是 $(\forall x)P(x)=F$

  即 $\neg(\forall x)P(x)=T$

(4) 举例

例1 “并非所有的动物都是猫” 的表示

设　　A(x)：x是动物

　　　B(x)：x是猫

原语句可表示成$\neg(\forall x)(A(x)\to B(x))$

依否定型公式得

$$
\begin{aligned}
&\neg(\forall x)(A(x)\to B(x))\\
&\quad=(\exists x)\neg(A(x)\to B(x))\\
&\quad=(\exists x)\neg(\neg A(x)\vee B(x))\\
&\quad=(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))
\end{aligned}
$$

而$(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$的含义是有一个动物不是猫，显然这句话与原语句等同

举例

例2“天下乌鸦一般黑”的表示

设　　$F(x)$：x是乌鸦

　　　$G(x, y)$：x与y是一般黑

原语句可表示成

$$(\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y) \rightarrow G(x,y))$$

不难知道与之等值的公式是

$$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge \neg G(x,y))$$

即不存在x, y是乌鸦但不一般黑．这两句话含义是相同的．经计算有

举例

$$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x,y))$$

$$= (\forall x)\neg((\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x,y)))$$

$$= (\forall x)(\forall y)\neg(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x,y))$$

$$= (\forall x)(\forall y)(\neg(F(x) \wedge F(y)) \vee G(x,y))$$

$$= (\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x,y))$$

5.2 量词分配等值式
5.2.1 量词对∨、∧的分配律

$$(\forall x)(P(x)\vee q)=(\forall x)P(x)\vee q$$

$$(\exists x)(P(x)\vee q)=(\exists x)P(x)\vee q$$

$$(\forall x)(P(x)\wedge q)=(\forall x)P(x)\wedge q$$

$$(\exists x)(P(x)\wedge q)=(\exists x)P(x)\wedge q$$

- 这是一组量词对∨、∧的分配律，其中**q**是命题变项，与个体变元**x**无关，这是很重要的条件
- 我们仅对第一个等式给出证明，其余三个同样可证

$(\forall x)(P(x)\vee q)=(\forall x)P(x)\vee q$

- 设在一解释I下，$(\forall x)(P(x)\vee q)=T$，从而对任一$x \in D$，有$P(x)\vee q=T$

  若$q=T$，则$(\forall x)P(x)\vee q=T$

  若$q=F$，从而对任一$x \in D$，有$P(x)=T$，即有$(\forall x)P(x)=T$，故仍有$(\forall x)P(x)\vee q=T$
- 反过来，设在一解释I下，$(\forall x)P(x)\vee q=T$

  若$q=T$，则$(\forall x)(P(x)\vee q)=T$

  若$q=F$，必有$(\forall x)P(x)=T$，从而对任一$x\in D$有$P(x)=T$，于是对任一$x \in D$有$P(x)\vee q=T$, 故$(\forall x)(P(x)\vee q)=T$

5.2.2 量词对→的分配律

$$(\forall x)(P(x)\to q)=(\exists x)P(x)\to q$$

$$(\exists x)(P(x)\to q)=(\forall x)P(x)\to q$$

$$(\forall x)(p\to Q(x))=p\to(\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(p\to Q(x))=p\to(\exists x)Q(x)$$

- 这是一组量词对→的分配律，其中**p**，**q**是命题变项，与个体变元**x**无关，这是很重要的条件

证明

- 先证明其中的第一个等式.

$$(\forall x)(P(x)\to q)$$

$$=(\forall x)(\neg P(x)\vee q)$$

$$=(\forall x)\neg P(x)\vee q$$ 依5.2.1的等值式

$$=\neg(\exists x)P(x)\vee q$$ 依5.1.2的等值式

$$=(\exists x)P(x)\to q$$

证明

- 再证明其中的第三个等式

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)(p \to Q(x)) \\
&\quad = (\forall x)(\neg p \vee Q(x)) \\
&\quad = \neg p \vee (\forall x)Q(x) \qquad \text{依5.2.1的等值式} \\
&\quad = p \to (\forall x)Q(x)
\end{aligned}
$$

- 其余两个等值式同样可证

5.2.3 量词∀对∧、量词∃对∨的分配律

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

- 这是当**P(x)**，**Q(x)**都含有个体变元**x**时，量词∀对∧，量词∃对∨所遵从的分配律．然而∀对∨，∃对∧的分配律一般并不成立

证明

(1) 证明$\forall$对$\wedge$的分配律

设在一解释I下，$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))=T$

于是对任一$x \in D$，$P(x) \wedge Q(x)=T$

即$P(x)=Q(x)=T$

从而有$(\forall x)P(x)=(\forall x)Q(x)=T$

故有$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)=T$

反推回去，易知在一解释I下，只要

$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)=T$

必有$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))=T$

证明

(2) 证明∃对∨的分配律

设在一解释I下, $(\exists x)(P(x) \vee Q(x))=T$

于是有$x_0 \in D$ 使$P(x_0) \vee Q(x_0)=T$

从而有$P(x_0)=T$或$Q(x_0)=T$也即

$(\exists x)P(x)$或$(\exists x)Q(x)$为T

故有$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)=T$

反推回去，易知在一解释I下，只要

$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)=T$

必有$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))=T$

证明

(3) 分析一下$\forall$对$\vee$分配律不成立的原因

先从{1，2}域上看．有

$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))=(P(1)\vee Q(1))\wedge(P(2)\vee Q(2))$

$=(P(1)\wedge P(2))\vee(Q(1)\wedge Q(2))$

$\vee(P(1)\wedge Q(2))\vee(Q(1)\wedge P(2))$

而$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)=(P(1)\wedge P(2))\vee(Q(1)\wedge Q(2))$

于是有

$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$

$=(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)\vee(P(1)\wedge Q(2))\vee(Q(1)\wedge P(2))$

然而$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))=(P(1)\wedge Q(1))\wedge(P(2)\wedge Q(2))$

$=(P(1)\wedge P(2))\wedge(Q(1)\wedge Q(2))=(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$

说明

- 可看出∀对∧的分配律，只涉及到∧和交换律，这是没有问题的，∀对∨的分配律，涉及到∧和∨，这是∀对∨分配律不成立的原因
- 从{1，2}域上的观察，可知

  $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

  是成立的

  将会看到该蕴涵关系在任意论域D上也是成立

证明

(4) 分析一下，∃对∧分配律不成立的原因

$$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))=(P(1)\wedge Q(1))\vee(P(2)\wedge Q(2))$$

$$(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$$

$$=(P(1)\vee P(2))\wedge(Q(1)\vee Q(2))$$

$$=(P(1)\wedge Q(1))\vee(P(2)\wedge Q(2))\vee(P(1)\wedge Q(2))\vee(P(2)\wedge Q(1))$$

$$=(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\vee(P(1)\wedge Q(2))\vee(P(2)\wedge Q(1))$$

$$(\exists x)(P(x)\vee Q(x))$$

$$=(P(1)\vee Q(1))\vee(P(2)\vee Q(2))$$

$$=(P(1)\vee P(2))\vee(Q(1)\vee Q(2))$$

$$=(\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$$

说明

- 可看出∃对∨的分配律，只涉及到∨和交换律，仍然是没问题的．∃对∧的分配律，涉及到∨和∧，这是∃对∧分配律不成立的原因
- 从{1，2}域上的观察，可知

  $(\exists x)(P(x) \land Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$

  是成立的．

  将会看到该蕴涵关系在任意论域D上也是成立的

说明

- 解释性的说明.
  如下规定解释I:
  x=1时, P(1)=T而Q(1)=F.
  x=2时, P(2)=F而Q(2)=T.
  对其他x属于D，只要求P(x), Q(x)中只有一为T
  在这个I下，
  (1) 有$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))=T$
  而没有$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)=T$
  (2) 有$(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)=T$
  而没有$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))=T$

5.2.4 变元易名后的分配律

$$(\forall x)(\forall y)(P(x)\vee Q(y))=(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y))=(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$$

- 这两个等值式，说明了通过变元的易名，仍可实现∀对∨，∃对∧的分配律
- 证明是容易的．首先有变元易名等值式

$(\forall x)Q(x)=(\forall y)Q(y)$

$(\exists x)Q(x)=(\exists y)Q(y)$

于是**$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)=(\forall x)P(x)\vee(\forall y)Q(y)$**

分配律

- 对x而言$(\forall y)Q(y)$相当于命题变项，与x无关，可推得
  $(\forall x)P(x)\vee(\forall y)Q(y)=(\forall x)(P(x)\vee(\forall y)Q(y))$
  对y而言，$P(x)$相当于命题变项与y无关，又可推得
  $(\forall x)(P(x)\vee(\forall y)Q(y))=(\forall x)(\forall y)(P(x)\vee Q(y))$
- 同理$(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y))=(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$
- 然而

$(\forall x)(\forall y)(P(x)\vee Q(y))$与$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$是不等值的

$(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y))$与$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$是不等值的

5.3 范式

- 在命题逻辑里．每一公式都有与之等值的范式

  范式是一种统一的表达形式、当研究一个公式的特点(如永真、永假)时，范式起着重要的作用
- 对谓词逻辑的公式来说也有范式，其中前束范式与原公式是等值的，而其他范式与原公式只有较弱的关系

5.3.1 前束范式

- 定义5.3.1 说公式A是一个前束范式，如果A中的一切量词都位于该公式的最左边(不含否定词)且这些量词的辖域都延伸到公式的末端，前束范式A的一般形式为

  $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)M(x_1，\ldots，x_n)$

  其中Q_i为量词∀或∃(i＝1，…，n)，M称作公式A的母式(基式)，M中不再有量词

前束范式

- 定理**5.3.1** 谓词逻辑的任一公式都可化为与之等值的前束范式．但其前束范式并不唯一
- 举例给出化前束范式的过程

举例

例 1 求$\neg((\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\rightarrow(\exists x)(\neg(\forall y)Q(y,b)\rightarrow R(x)))$的前束范式.

可按下述步骤实现:

(1) 消去联结词$\rightarrow,\leftrightarrow$.

$\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\vee(\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y,b)\vee R(x)))$

(2) $\neg$ 内移(反复使用摩根律)

$(\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\wedge\neg(\exists x)((\forall y)Q(y,b)\vee R(x))$

$=(\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\wedge(\forall x)((\exists y)\neg Q(y,b)\wedge\neg R(x))$

(3) 量词左移(使用分配等值式)

$(\forall x)((\exists y)P(a,x,y)\wedge(\exists y)\neg Q(y,b)\wedge\neg R(x))$

(4) 变元易名.(使用变元易名分配等值式)

$(\forall x)((\exists y)P(a,x,y)\wedge(\exists z)\neg Q(z,b)\wedge\neg R(x))$

$=(\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a,x,y)\wedge\neg Q(z,b)\wedge\neg R(x))$

$=(\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a,b,x,y,z)$

前束范式

- 经过这几步，便可求得任一公式的前束范式．由于每一步变换都保持着等值性，所以，所得到的前束形与原公式是等值的
- 这里的S(a，b，x，y，z)便是原公式的母式。其中a,b是自由个体变项
- 由于前束中量词的次序排列，以及对母式都没有明确的限制，自然前束范式不是唯一的，如例1的前束范式也可以是

$(\forall x)(\exists z)(\exists y)(S(a,b,x,y,z) \wedge P)$

其中P可以是任一不含量词的普遍有效的公式

5.3.2 Skolem标准形

- 前束范式对前束量词没有次序要求，也没有其他要求
- 如果我们要求:

  (1) 只保留全称量词而消去存在量词-- **Skolem**标准形

  (2) 所有存在量词都在全称量词之左

  (3) 所有全称量词都在存在量词之左
- 不难想像，仍保持与原公式的等值性就不可能了，只能保持在某种意义下的等值关系

Skolem标准形

- 仅保留全称量词的前束形
- 定理5.3.3 谓词逻辑的任一公式A，都可化成相应的Skolem标准形(只保留全称量词的前束形)，并且A是不可满足的当且仅当其Skolem标准形是不可满足的
- 这定理是说对不可满足的公式，它与其Skolem标准形是等值的，而一般的公式与其Skolem标准形并不是等值的. 自然仅当A是不可满足的方使用Skolem标准形

举例

例3 求公式$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x, y, z, u, v, w)$的Skolem标准形

- 将一公式化成Skolem标准形，首先也要求出前束形．这个例子已是前束形了，便可直接求Skolem标准形了

例3 $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x, y, z, u, v, w)$

- 首先将最左边的$(\exists x)$消去，而将谓词P中出现的所有变元x均以论域中的某个常项a(未在P中出现过)代入
- 进而消去从左边数第二个存在量词$(\exists u)$，因$(\exists u)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$，需将谓词P中出现的所有变元u均以y，z的某个二元函数f(y，z)(未在P中出现过)代入
- 最后按同样的方法消去存在量词$(\exists w)$，因$(\exists w)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$和$(\forall v)$，需将谓词P中出现的所有变元w均以y，z，v的某个三元函数g(y，z，v)(未在P中出现过也不同于f(y，z))代.
- 这样便得消去全部存在量词的Skolem标准形
$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))$

说明

- 消存在量词是将相应变元以函数代入，可这样来理解，如$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的Skolem标准形是$(\forall x)P(x, f(x))$.
- 因为$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的意思是对任一x，都有一个y使$P(x, y)$成立，那么这个y通常是依赖于x的，可视作x的某个函数$f(x)$．从而有Skolem标准形$(\forall x)P(x, f(x))$
- 然而所能找到的y不必然是x的函数f，于是$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$与$(\forall x)P(x, f(x))$并不等值

$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$与$(\forall x)P(x, f(x))$不等值

- 在{1，2}域上

$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$

$=(P(1, 1)\vee P(1, 2))\wedge(P(2, 1)\vee P(2, 2))$

$=(P(1, 1)\wedge P(2, 1))\vee(P(1, 1)\wedge P(2, 2))$

$\vee(P(1, 2)\wedge P(2, 1))\vee(P(1, 2)\wedge P(2, 2))$

$(\forall x)P(x, f(x))=P(1, f(1))\wedge P(2, f(2))$

- 两者明显的不等值，但在不可满足的意义下两者是一致的，这种标准形，对使用归结法的定理证明来说是重要的

5.4 基本的推理公式

- 命题逻辑中有关推理形式、重言蕴涵以及基本的推理公式的讨论和所用的术语，都可引入到谓词逻辑中．并可把命题逻辑的推理作为谓词逻辑推理的一个部分来看待
- 这里所介绍的是谓词逻辑所特有的，在命题逻辑里不能讨论的推理形式和基本的推理公式

5.4.1 推理形式举例

- 例1 所有的整数都是有理数，所有的有理数都是实数，所以所有的整数都是实数.

引入谓词将这三句话形式化，可得如下推理形式

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$

$\rightarrow(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$

其中:

P(x): x是整数；Q(x): x是有理数；R(x): x是实数

举例

- 例2 所有的人都是要死的，孔子是人，所以孔子是要死的

引入谓词将这三句话形式化，可得如下推理形式

$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge A(孔子) \rightarrow B(孔子)$

其中:

A(x): x是人；**B(x): x**是要死的

举例

- 例3 有一个又高又胖的人，必有一个高个子而且有一个胖子。

引入谓词将这两句话形式化，可得如下推理形式

$$(\exists x)(C(x)\wedge D(x))\rightarrow(\exists x)C(x)\wedge(\exists x)D(x)$$

其中：

C(x): x是高个子；D(x): x是胖子

举例

- 例4 若某一个体a具有性质E，那么所有的个体x都具有性质E.

  这两句话形式化，可得如下推理形式：

  $E(a) \rightarrow (\forall x)E(x)$

- 不难看出，由例1，2，3所建立的推理形式是正确的，而例4的推理形式是不正确的

说明

- 从而有

  $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$

  $\quad\Rightarrow(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$

  $(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))\wedge A(\text{孔于}) \Rightarrow B(\text{孔子})$

  $(\exists x)(C(x)\wedge D(x)) \Rightarrow (\exists x)C(x)\wedge(\exists x)D(x)$

- 这样的推理形式是命题逻辑所不能处理的，或说这些推理关系，仅使用命题逻辑的工具是无法描述的，需使用谓词逻辑的工具.

- 如例1所讨论的推理，在命题逻辑里只能形式化成 三个独立命p，q，r间的推理形式

  $p\wedge q\rightarrow r$

  这显然不是正确的推理形式

5.4.2 基本的推理公式

(1) $(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \lor Q(x))$
(2) $(\exists x)(P(x) \land Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$
(3) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$
(4) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$
(5) $(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$
(6) $(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)Q(x)$
(7) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \land (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$
$\Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$
(8) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \land P(a) \Rightarrow Q(a)$
(9) $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$
(10) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

注：这些推理公式或称推理定理的逆一般是不成立的，所以正确地理解这些定理的前提与结论的不同是重要的

5.4.3 基本推理公式的说明

- 仅就其中的2，3和10来讨论

(2)$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$

这定理在{1, 2}域上是成立的，已在5.2.3节作了说明, 再从语义上讨论

如果个体域是某班学生，P(x)表x是高材生．Q(x)表x是运动健将, 那么$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$表这个班上有一个学生既是高材生又是运动健将.

而$(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$只是说这个班上有一个高材生而且有一个运动健将，但不要求高材生和运动健将是同一个学生

$$(2)(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$$

- 显然推理式是成立的，其结论比前提明显地要求弱了．从而这推理式的逆是不成立
- 不难给出解释性的证明

设解释I下有$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x)=T$。

即有$x_o\in D$使$P(x_o)\wedge Q(x_o)=T$

从而有$P(x_o)=T$，$Q(x_o)=T$

也即$(\exists x)P(x)=T$，$(\exists x)Q(x)=T$

从而有$(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)=T$

(3) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$

- 从语义上讨论. 论域仍是某班的学生.
- 为使$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$=T, 论域内学生分布只有两种可能，一是班上所有学生都是高材生又都是运动健将; 一是班上有的学生不是高材生，但凡高材生必是运动健将。这两种情况下都有$(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$=T
- 然而这推理式的逆是不成立的，仅当班上有的高材生不是运动健将，而且又有的学生不是高材生时，有$(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$＝T．而$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$＝F

(3) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$

- 解释性的证明

  设在一解释I下，有

  $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) = T$

  从而对任一$x \in D$, $P(x)\rightarrow Q(x)=T$.

  必能保证$(\forall x)P(x) = T$时有$(\forall x)Q(x) = T$

  从而有

  $(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)=T$

(10)$(\exists x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$

- 这定理在{1，2}域上是成立的，已在4.5. 2节作了说明, 从语义上讨论
- 如论域为实数域上的区间[-1，1]，而P(x,y)表示x·y=0.

  这时$(\exists x)(\forall y)P(x, y)$=T. 因为取x=0，对所有的y都有x·y=0.

  自然有$(\forall y)(\exists x)P(x,y)$=T, 因对所有的y, 均取x=0便有x·y=0成立
- 这定理的逆是不成立的

  如取P(x, y)表示x+y=0，这时

  $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$=T，而 $(\exists x)(\forall y)P(x, y)$=F

(10) $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$

- 解释性的证明

  设一解释I下，有$(\exists x)(\forall y)P(x, y)=T$，于是有$x_0\in D$，使对一切的$y\in D$都有

  $P(x_0, y)=T$.

  从而对一切的$y\in D$，都有一个x(均选为x_0)使$P(x, y)=T$，即$(\forall y)(\exists x)P(x,y)=T$

5.5 推理演算

- 命题逻辑中引入推理规则的推理演算，可推广到谓词逻辑，有关的推理规则都可直接移入到谓词逻辑，除此之外还需介绍**4**条有关量词的消去和引入规则
- 代入规则需补充说明：

  包括命题变项、自由个体变项和谓词变项的代入，要求保持合式公式和普遍有效性不被破坏

5.5.1 推理规则
(1)全称量词消去规则

- $(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$，其中y是论域中一个体

  意指如果所有的$x \in D$都具有性质P，那么D中任一个体y必具有性质P.
- 当P(x)中不再含有量词和其他变项时，这条规则明显成立.

  而当允许P(x)中可出现量词和变项时，需限制y不在P(x)中约束出现(即右侧量不在左侧约束出现)
- 设$P(x) = (\exists y)(x<y)$,

  则$(\forall x)P(x) = (\forall x)((\exists y)(x<y))$在实数上成立

  不应有$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$，因为$P(y) = (\exists y)(y<y)$ 是矛盾式。这时，y在P(x)中是约束出现了

(2)全称量词引入规则

- $P(y) \Rightarrow (\forall x)P(x)$, 其中y是论域中任一个体意指如果任一个体y(自由变项)都具有性质P，那么所有个体x都具有性质P
- 仍需限制x不在P(y)中约束出现(即右侧量不在左侧约束出现)
- 如$P(y)=(\exists x)(x>y)$在实数域上成立，$(\forall x)P(x)=(\forall x)((\exists x)(x>x))$是不成立的

(3)存在量词消去规则

- $(\exists x)P(x)\Rightarrow P(c)$, 其中c是论域中的一个个体常项
  意指如果论域中存在有个体具有性质P，那么必有某个个体c具有性质P
- 需限制$(\exists x)P(x)$中没有自由个体出现
  如实数域上$(\exists x)P(x)=(\exists x)(x>y)$是成立的，y是自由个体，这时不能推导出$P(c)=c>y$
- 还需限制$P(x)$中不含有c．如在实数域上$(\exists x)P(x)=(\exists x)(c<x)$是成立的，$P(c)=c<c$不成立
- 思考方式
  先定P, 再定c, 最后讨论$(\exists x)P(x)\Rightarrow P(c)$的正确性

(4)存在量词引入规则

- $P(c) \Rightarrow (\exists x)P(x)$, 其中c是论域中一个个体常项
  意指如果有个体常项c具有性质P，那么$(\exists x)P(x)$必真
- 需限制x不出现在P(c)中．如实数域上，$P(0)＝(\exists x)(x>0)$成立，但$(\exists x)P(x)=(\exists x)(\exists x)(x>x)$是不成立的

推理规则

- 这4条推理规则是基本的，对多个量词下的量词消去与引入规则的使用也已谈到．再明确说明一下
  - $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \Rightarrow (\exists y)P(x, y)$

    的右端，不允许写成$(\exists y)P(y, y)$
  - $(\forall x)P(x, c) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x, y)$

    的右端，不允许写成$(\exists x)(\forall x)P(x, x)$

推理规则

- **$(\forall x)(\exists y)P(x, y) \Rightarrow (\exists y)P(x, y) \Rightarrow P(x, a)$**

但不允许再推演出$(\forall x)P(x, a)$和$(\exists y)(\forall x)P(x, y)$

原因是$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$成立时，所找到的$y$是依赖于$x$的，从而$P(x, y)$的成立是有条件的，不是对所有的$x$对同一个$y$都有$P(x, y)$成立，于是不能再推演出$(\forall x)P(x, y)$

5.5.2 使用推理规则的推理演算举例

- 和命题逻辑相比，在谓词逻辑里使用推理规则进行推理演算同样是方便的，然而在谓词逻辑里，真值表法不能使用，又不存在判明A→B是普遍有效的一般方法，从而使用推理规则的推理方法已是谓词逻辑的基本推理演算方法
- 推理演算过程
  - 首先是将以自然语句表示的推理问题引入谓词形式化
  - 若不能直接使用基本的推理公式便消去量词
  - 在无量词下使用规则和公式推理
  - 最后再引入量词以求得结论

举例

例1 前提 $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$, $(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$

结论 $(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$

证明

(1) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$ 前提

(2) $P(x)\rightarrow Q(x)$ 全称量词消去

(3) $(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$ 前提

(4) $Q(x)\rightarrow R(x)$ 全称量词消去

(5) $P(x)\rightarrow R(x)$ (2)，(4)三段论

(6) $(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$ 全称量词引入

举例

例2 所有的人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的.

首先引入谓词形式化，令P(x)表x是人，Q(x)表x是要死的，于是问题可描述为

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge P(\text{苏格拉底})\rightarrow Q(\text{苏格拉底})$

证明

(1) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$	前提
(2) $P(\text{苏格拉底})\rightarrow Q(\text{苏格拉底})$	全称量词消去
(3) $P(\text{苏格拉底})$	前提
(4) $Q(\text{苏格拉底})$	(2)，(3)分离

举例

例3 前提$(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)((P(x)\vee Q(x))\rightarrow R(x))$，$(\exists x)P(x)$

结论$(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge R(y))$

证明

(1)	$(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)((P(x)\vee Q(x))\rightarrow R(x))$	前提
(2)	$(\exists x)P(x)$	前提
(3)	$(\forall x)((P(x)\vee Q(x))\rightarrow R(x))$	(1)，(2)分离
(4)	$P(c)$	(2)存在量词消去
(5)	$P(c)\vee Q(c)\rightarrow R(c)$	(3)全称量词消去
(6)	$P(c)\vee Q(c)$	(4)
(7)	$R(c)$	(5)，(6)分离
(8)	$(\exists x)R(x)$	(7)存在量词引入
(9)	$(\exists y)R(y)$	(7)存在量词引入
(10)	$(\exists x)R(x)\wedge(\exists y)R(y)$	(8)，(9)
(11)	$(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge R(y))$	(10)置换

举例

例4 分析下述推理的正确性

(1)$(\forall x)(\exists y)(x>y)$	前提
(2)$(\exists y)(z>y)$	全称量词消去, y与z有关
(3)$z>b$	存在量词消去, b依赖z
(4)$(\forall z)(z>b)$	全称量词引入, b不依赖z
(5)$b>b$	全称量词消去
(6)$(\forall x)(x>x)$	全称量词引入

推理(1)到(2)，应明确指出y是依赖于x的，即(2)中y和z有关.(2)到(3)，其中的b是依赖于z的，从而(3)到(4)是不成立的.

又由于b是常项，(5)到(6)也是不允许的，因个体常项不能用全称量词量化

举例

例5 有的病人喜欢所有的医生，没有一个病人喜欢某一庸医， 所以没有医生是庸医.

先形式化．令P(x)表x是病人，Q(x)表x是庸医．D(x)表x是医生，L(x，y)表x喜欢y，

第一句话可描述为

$$(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(D(y)\rightarrow L(x，y)))$$

第二句话可描述为

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow(\forall y)(Q(y)\rightarrow\neg L(x，y)))$$

或写成

$$\neg(\exists x)(P(x)\wedge(\exists y)(Q(y)\wedge L(x，y)))$$

结论可描述为

$$(\forall x)(D(x)\rightarrow\neg Q(x))$$

或写成

$$\neg(\exists x)(D(x)\hat{}Q(x))$$

例5

证明

(1)$(\exists x)(P(x)\land(\forall y)(D(y)\to L(x, y)))$	前提
(2)$P(c)\land(\forall y)(D(y)\to L(c，y))$	存在量词消去
(3)$(\forall x)(P(x)\to(\forall y)(Q(y)\to\neg L(x，y)))$	前提
(4)$P(c)\to(\forall y)(Q(y)\to\neg L(c，y))$	全称量词消去
(5)$P(c)$	(2)
(6)$(\forall y)(D(y)\to L(c，y))$	(2)
(7)$D(y)\to L(c,y)$	全称量词消去
(8)$(\forall y)(Q(y)\to\neg L(c,y))$	(4)，(5)分离
(9)$Q(y)\to\neg L(c，y)$	全称量词消去
(10)$L(c，y)\to\neg Q(y)$	(9)置换
(11)$D(y)\to\neg Q(y)$	(7)，(10)三段论
(12)$(\forall y)(D(y)\to\neg Q(y))$	全称量词引入
(13)$(\forall x)(D(x)\to\neg Q(x))$	(12)置换

5.6 谓词逻辑的归结推理法

- 归结方法可推广到谓词逻辑，困难在于出现了量词、变元．证明过程同命题逻辑，只不过每一步骤都要考虑到有变元，从而带来复杂性
- 使用推理规则的推理演算过于灵活，技巧性强，而归结法较为机械，容易使用计算机来实现

5.6.1 归结证明过程

- 为证明A→B是定理(A，B为谓词公式)，即A⇒B，等价的是证明A∧¬B=G是矛盾式，这是归结法的出发点(反证法)
- 建立子句集S。如何消去G中的量词，特别是存在量词，是建立子句集S的关键。办法是
  - 先将G化成等值的前束范式，进而将这前束形化成Skolem标准形，消去存在量词(以常项代替如a)，得仅含全称量词的公式G'(曾指出G与G'在不可满足的意义下是一致的，从而对G的不可满足性．可由G'的不可满足性来求得)
  - 再将G'中的全称量词省略，G'母式(已合取范式化)中的合取词∧以“，”表示，便得G的子句集S. 而S与G是同时不可满足的，S中的变元视作有全称量词作用着

归结过程

- 对S作归结

  设C_1，C_2是S中的两个子句：

  （1）、若C_1，C_2有互补对，消去互补对，得到新的归结式放入S中；

  （2）、若C_1，C_2没有互补对，且它们无共同个体变元，不妨设L_1，L_2分别是C_1，C_2中的文字，如果L_1和$\neg L_2$有合一置换σ，则

  $$(C_1\sigma - \{L_1\sigma\}) \cup (C_2\sigma - \{L_2\sigma\})$$

  称作子句C_1，C_2的归结式.

  如　$C_1=P(x)\vee Q(x)$，$C_2=\neg P(a)\vee R(y)$

  $P(x)$与$\neg P(a)$，在合一置换$\{x / a\}$下将变元x换成a，便为互补对可作归结了，有归结式

  $$R(C_1，C_2)=Q(a)\vee R(y)。$$

  对子句集S的任两子句作归结(如果可作归结)．并将归结式仍放入S中．重复这过程.

- 直至归结出空子句“□”，得到矛盾，证明结束

5.6.2 归结法证明举例

例1 $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))\Rightarrow(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$

首先写出公式G

$G=(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))\wedge\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$

为求G的子句集S，可分别对$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$, $(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$, $\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$作子句集，然后求并集来作为G的"子句集"(这个"子句集"不一定是S，但与S同时是不可满足的，而且较之来得简单，于是为方便可将这个"子句集"视作S)

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$的子句集为$\{\neg P(x)\vee Q(x))$

$(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$的子句集为$\{\neg Q(x)\vee R(x)\}$

$$\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))=(\exists x)\neg(\neg P(x)\vee R(x))$$

$$=(\exists x)(P(x)\wedge\neg R(x))$$

Skolem化，得子句集$\{P(a),\ \neg R(a)\}$

于是G的子句集

$S=\{\neg P(x)\vee Q(x),\ \neg Q(x)\vee R(x),\ P(a),\ \neg R(a)\}$

例1

$S=\{\neg P(x)\vee Q(x),\ \neg Q(x)\vee R(x),\ P(a),\ \neg R(a)\}$

证明S是不可满足的，有归结过程：

(1) $\neg P(x)\vee Q(x)$

(2) $\neg Q(x)\vee R(x)$

(3) $P(a)$

(4) $\neg R(a)$

(5) $Q(a)$ (1)(3)归结

(6) $R(a)$ (2)(5)归结

(7) $\square$ (4)(6)归结

例2

$A_1 = (\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(x, y)))$

$A_2 = (\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$

$B = (\forall x)(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$

求证$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$

证明: 不难建立

A_1的子句集为$\{P(a), \neg D(y) \vee L(a, y)\}$

A_2的子句集为$\{\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x, y)\}$

$\neg B$的子句集为$\{D(b), Q(b)\}$,

求并集得子句集S，进而建立归结过程：

(1) P(a)

(2) ¬D(y)∨L(a，y)

(3) ¬P(x)∨¬Q(y)∨¬L(x，y)

(4) D(b)

(5) Q(b)

(6) L(a，b) (2)(4)归结

(7) ¬Q(y)∨¬L(a，y) (1)(3)归结

(8) ¬L(a，b) (5)(7)归结

(9) □ (6)(8)归结