第二章补充题

概念问题

若一个无向图有 5 个结点，如果它的补图是连通图，那么这个无向图最多有___6___条边。

12. 下图有（ ）个割点.

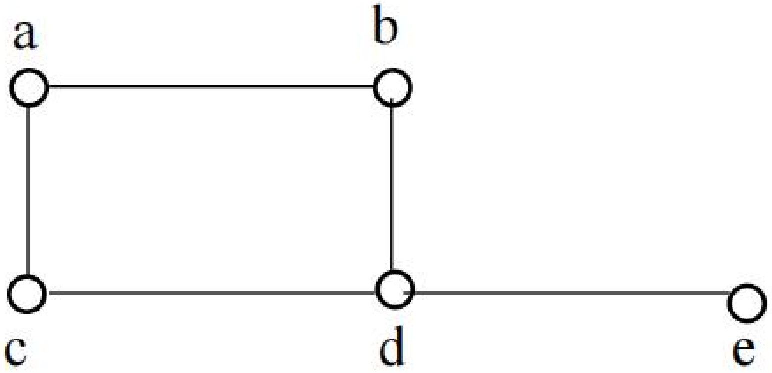
A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

B



概念问题

(　) 15. 下面说法错误的是______　　C

A. 结点数大于 2 的简单图 G 中一定存在度相同的结点

B. 同构的图存在同构的导出子图

C. 简单图 G 中，若 $m \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，则 G 不存在孤立点

D. 连通无向图的每一对不同的顶点之间都存在简单道路

2、顶点和边的交替序列 $u\ e_1\ v\ e_2\ w\ e_3\ v\ e_4\ u$ 不能称为___D___。

A. 道路　B. 迹（简单道路）　C. 闭迹（简单回路）　D. 初级道路

概念问题

六、(8 分) 设G = (V, E)为非平凡无向图，边数为m，顶点数为n，请证明下面两个命题等价：

(1) G中任意两点间存在唯一的路径。

(2) G无圈且m = n − 1。

由①到②：先证明G中无圈。若G中存在关联某顶点v的环，则v到v存在长为0和1的两条路（注意圈是路的特殊情况），这与已知矛盾。若G中存在长度大于或等于2的圈，则圈上任何两个顶点直接都存在两条不同的路，这也引出矛盾。下面用归纳法证明$m = n - 1$。

当$n = 1$时，G为平凡图，结论显然成立。设$n \le k(k \ge 1)$时结论成立。当$n = k + 1$时，设$e = (u, v)$为G中的一条边，由于G中无圈，所以$G - e$为两个连通分量G_1和G_2。设n_i和m_i分别为G_i中的顶点数和边树，则$n_i \le k(i = 1,2)$，由归纳假设法可知$m_i = n_i - 1$，于是$m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 - 2 + 1 = n - 1$。

由②到①:由②可得，G是连通的，$\forall e \in E$,均有$E(G - e) = n - 1 - 1 = n - 2$，因此$G - e$已不是连通图，因此$G$中每条边均为桥，因此$G$为树，因此得证。

概念问题

3、（7 分）证明连通图中任意最长的两条（即长度排序前两位的）初级道路都有公共顶点

证：**第一步准备工作：**设 P1：v1……v2 与 P2：u1……u2 是 2 条最长的初级道路，长度分别l_{P1}和l_{P2}，为且不相交；因为图是连通的，所以 v2 到 u2 之间有初级道路 P3，设长度为l_{P3}。

第二步：P1, P2, P3 衔接延长方案：

沿 P3 从 v2 出发，设 v3 是 P3 与 P1 最后一个交点，u3 是 P3 与 P2 第一个交点；

P1 分两段：$l_{P1}=l_{v1,v3}+l_{v3,v2}$，

P2 分两段：$l_{P2}=l_{u1,u3}+l_{u3,u2}$，

l_{P3}中考察$l_{v3,u3}$；

不失一般性设：

$$l_{P1}\ge l_{P2}$$

$$l_{v1,v3}\ge l_{P1}/2$$

$$l_{u1,u3}\ge l_{P2}/2$$

则新初级道路 v1 → v3 → u3 → u1 有：

$$l_{v1,v3}+l_{v3,u3}+l_{u1,u3}\ge \frac{l_{P1}}{2}+l_{v3,u3}+\frac{l_{P2}}{2}\ge l_{P2}+l_{v3,u3}>l_{P2}，矛盾。$$

哈密顿问题

15. 图 G 为哈密尔顿图的必要条件是 G 为(　)

A. 欧拉图

B. 树

C. 完全图

D. 连通图

C

(　) 15. 下面说法错误的是 ______

A. 若简单图每个结点的度大于等于 $\frac{n}{2}$，则 G有 H回路

B. K_n 的 H回路含有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 条边

C. 如果一个图 G的子图是非平面图，则 G一定是非平面图

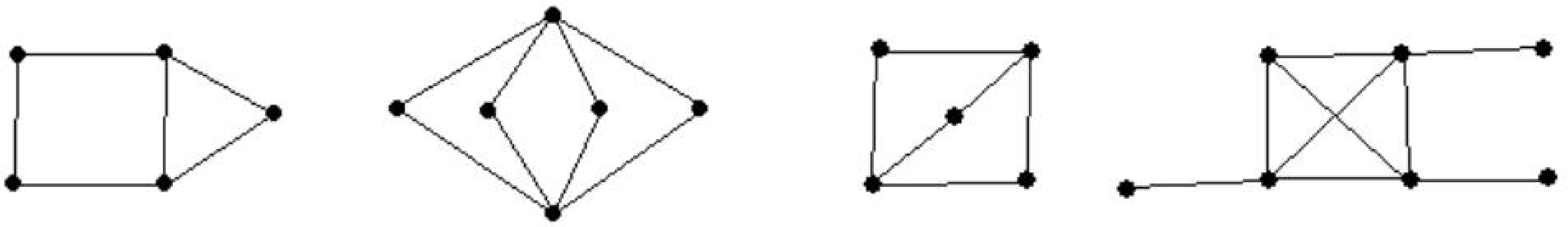
D. 简单图 G的任意结点 v_i，v_j 之间恒有 $d(v_i)+d(v_j)\geq n$，则 G存在 H回路

B

哈密顿问题

（ ）13. 下图中哪个存在哈密顿圈？

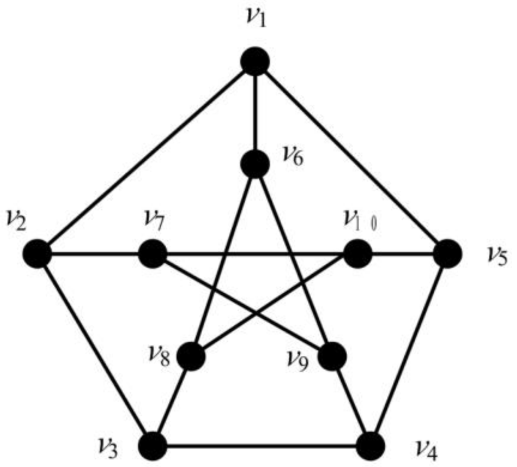
A



A　　B　　C　　D

9. 在图(a)中是否存在哈密尔顿回路（是或否）：__________。

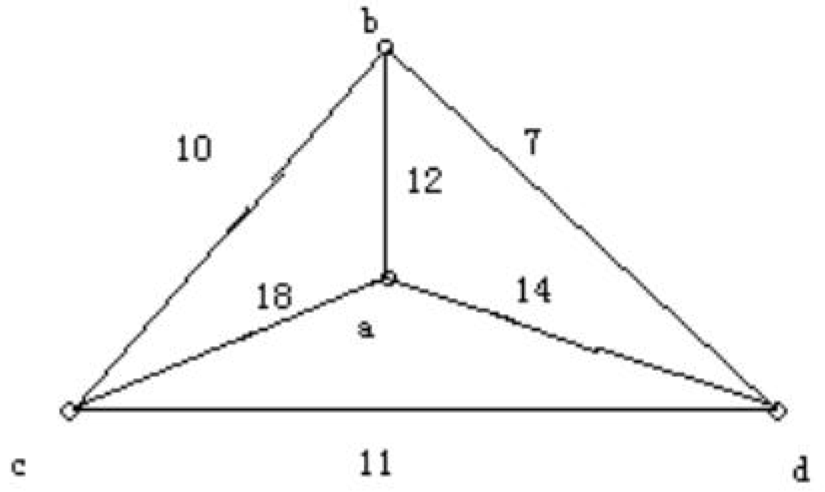
是



图(a)

哈密顿问题

6. 下图所示的带权完全图中，具有最小权值和的哈密顿圈为 adcba 。

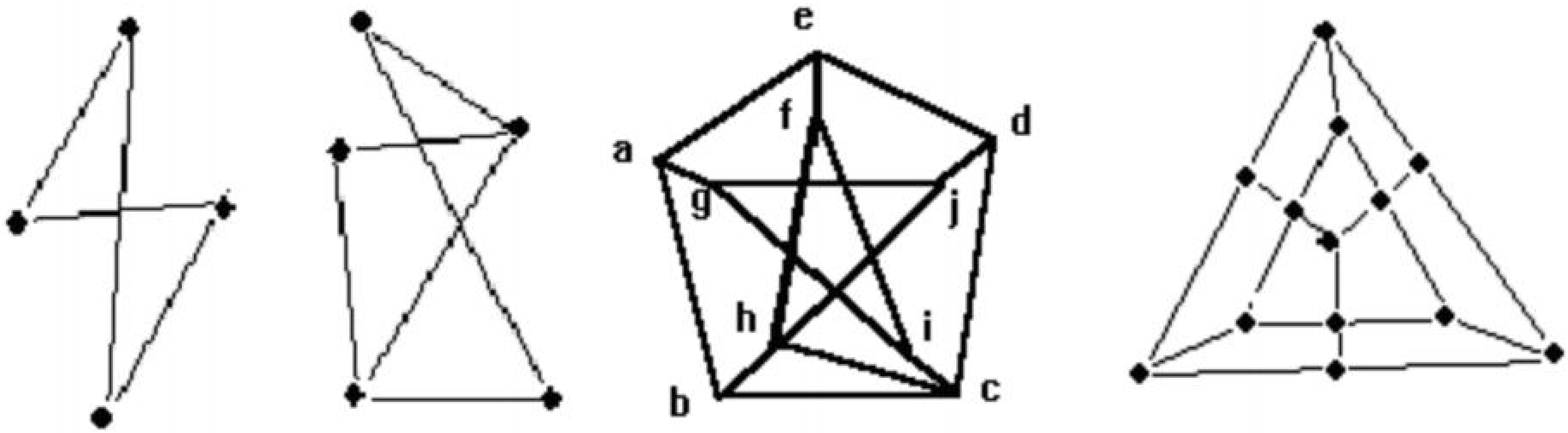


6、若图 G 的结点的度数由以下序列给出，则（ ）肯定有哈密尔顿回路 B

A. 2,2,2,2,2,2　　B. 4,4,4,4,5,5　　C. 1,2,3,4,5,5　　D. 3,3,4,4,4,5

哈密顿问题

（ ）14. 下图中______不存在H回路 D

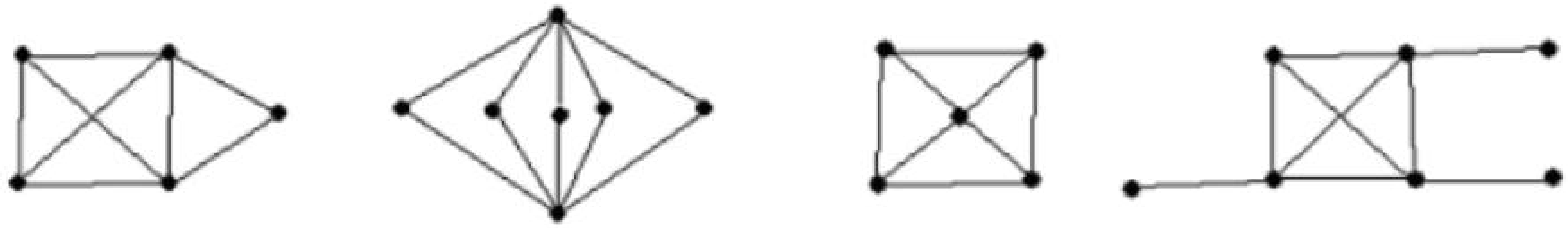


A B C D

8. 在无向完全图 K_n 中，没有公共边的哈密顿圈（H回路）的条数是：[(n-1)/2]________。

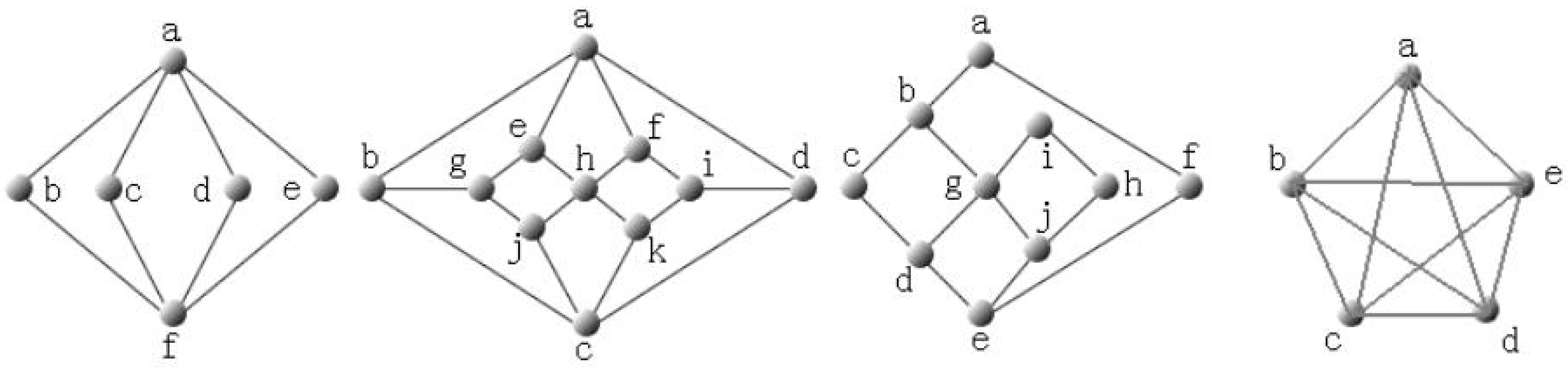
哈密顿问题

（　）19. 下图中存在H回路的图有 ______个 C



A. 0　B．1　C．2　D．3

（　）15. 下图中______不存在H回路 A



A　B　C　D

哈密顿问题

七、(8 分) 设简单图 G=(V, E)，结点数为 n，边数为 m，其中 $n \geq 3$。证明：如果 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2=m$，那么 G 为哈密顿 (Hamilton) 图。

使用反证法。若不然，则必存在不相邻的结点 u_0, v_0，且

$$d(u_0)+d(v_0) \leq m-1.$$

令 G' 为：将 G 中的结点 u_0, v_0 以及与 u_0, v_0 关联的所有边删去后所得，则 G' 为含 m-2 个结点的图，且 G' 比 G 最多少了 m-1 条边。

设 G' 的边数为 n'，于是有

$$\begin{aligned} n' &\geq n-(m-1)=C_{m-1}^2+2-(m-1) \\ &=\frac{(m-1)(m-2)}{2}+2-m+1 \\ &=\frac{(m-2)(m-3)}{2}+1=C_{m-2}^2+1 \end{aligned}$$

而 G' 为含 m-2 个结点的图知

$$n' \leq C_{m-2}^2 < C_{m-2}^2+1$$

这与 $n' \geq C_{m-2}^2+1$ 相矛盾。于是对于 G 中任意两个不相邻的结点 u_0, v_0，均有

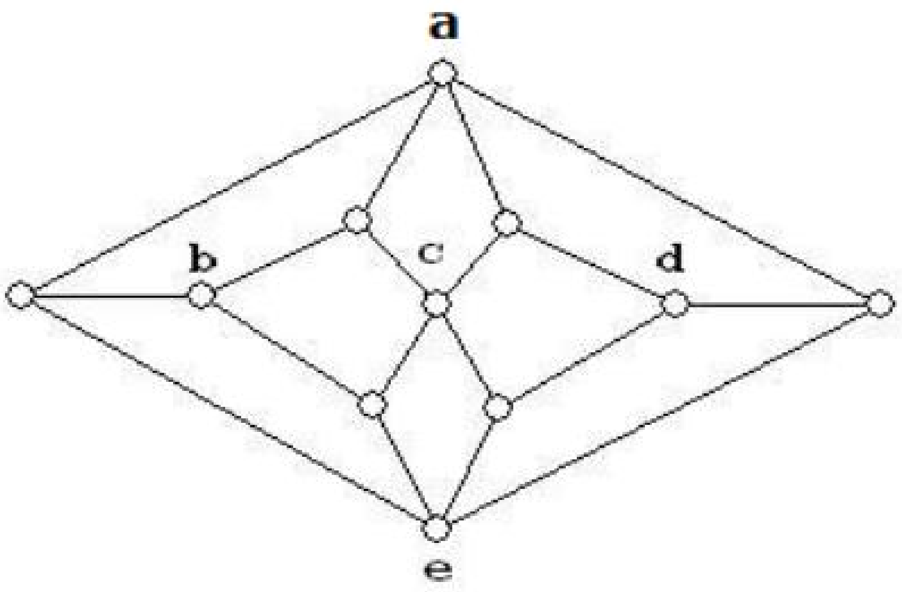
$$d(u_0)+d(v_0) \geq m$$

于是 G 为哈密顿图。

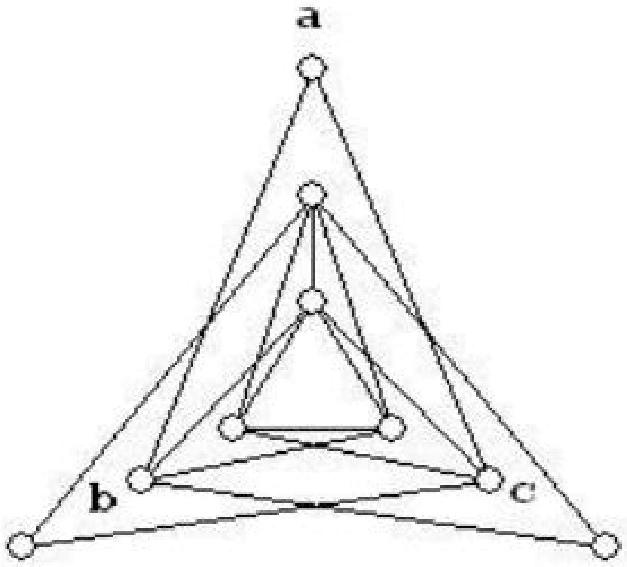
哈密顿问题

答案：图 G_1、G_2 都不是哈密尔顿图，理由如下：

 丑。



G_1



G_2

在 G_1 中，令 $S=\{a, b, c, d, e\}$，则 $W(G_1-S)=6$，由必要性定理知，G_1 不是哈密尔顿图。

在 G_2 中令 $S=\{a, b, c\}$，则 $W(G_2-S)=4$，所以 G_2 也不是哈密尔顿图。

哈密顿问题

证明: 二分图 $G=<X,Y>$, X 与 Y 是其二分的结点子集. 证明: 如果 G 为哈密顿图, 那么 $|X|=|Y|$.

证明: 不妨设G中一条H回路 $(v_1, v_2, v_3 \cdots v_n)$ 且 v_1 与 v_n 相连. 再设 $v_1 \in X$

$\because$ v_1, v_2 相连, G为二分图

$\therefore$ $v_2 \in Y$

$\because$ v_2, v_3 相连, G为二分图

$\therefore$ $v_3 \in X$

同理可知, $v_1, v_3 \cdots v_{2k+1} \in X$, $v_2, v_4 \cdots v_{2k} \in Y$

如果n为奇数, 那么 $v_1 \in X$, $v_n \in X$, 这和 v_1 与 v_n 相连矛盾

所以n为偶数, $v_1, v_3 \cdots v_{n-1} \in X$, $v_2, v_4 \cdots v_n \in Y$

$\therefore |X| = |Y| = \frac{n}{2}$

欧拉问题

(　　) 7. 下列结论不正确是(　).

D

A. 无向连通图 G 是欧拉图的充要条件是 G 不含奇数度结点

B. 无向连通图 G 有欧拉路的充要条件是 G 最多有两个奇数度结点

C. 有向连通图 D 是欧拉图的充要条件是 D 的每个结点的入度等于出度

D. 有向连通图 D 有有向欧拉路的充分必要条件是除两个结点外，每个结点的入度等于出度

8. 设连通图 G 有 k 个奇数度的结点，证明在图 G 中至少要添加（）条边才能使其成为欧拉图.

A. $k-1$　　B. $\frac{k}{2}$　　C. k　　D. $2k$

B

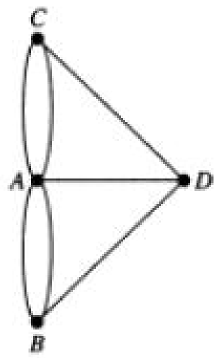
欧拉问题

11. 设无向图 G 有k个奇度数结点，至少需要添加 k/2 条边，使得到的图有欧拉回路.

5、七桥问题中至少再架（ ）座桥就可以从任意地点出发，经过每座桥一次且仅一次，并且回到出发地点

A . 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

B

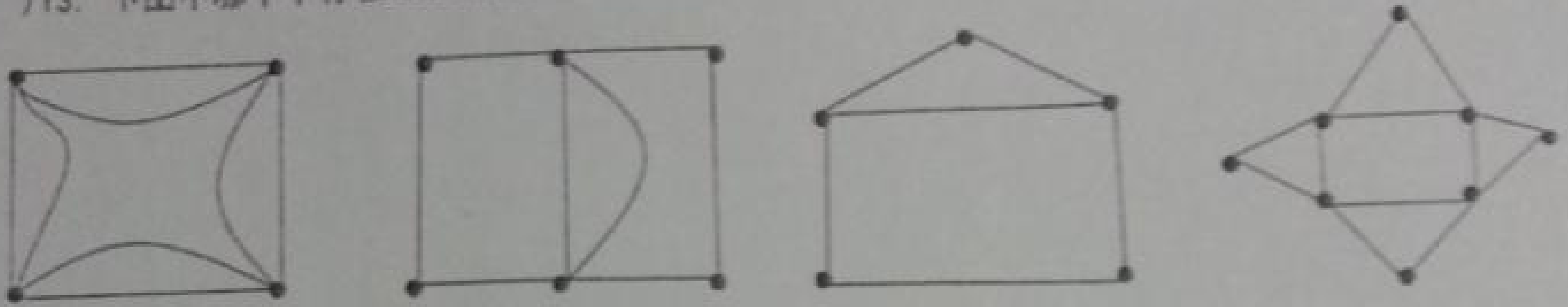


七桥问题图

欧拉问题

班级号____________

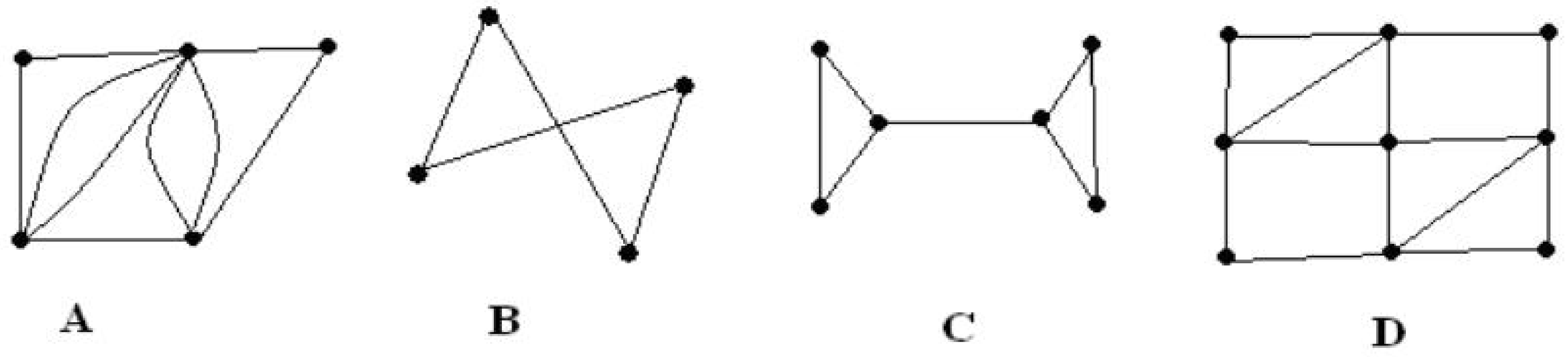
( )13. 下图中哪个不存在欧拉闭迹（欧拉回路）？ C



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

欧拉问题

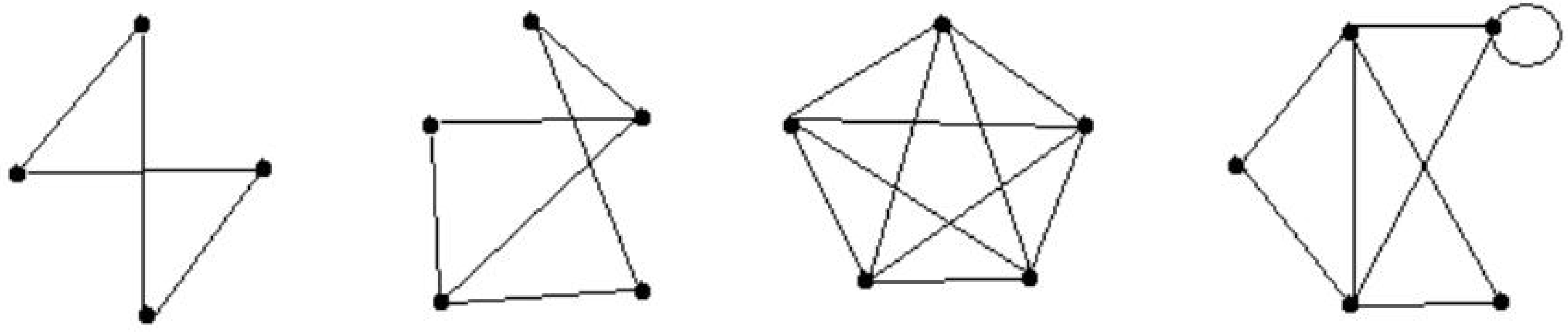
（　）12. 下图中哪个不存在欧拉闭迹（欧拉回路）？ C



8. 当 n 为 奇数 时，n 阶完全无向图 K_n 是欧拉图。

欧拉问题

（　）16.　下图中______不存在欧拉回路　B

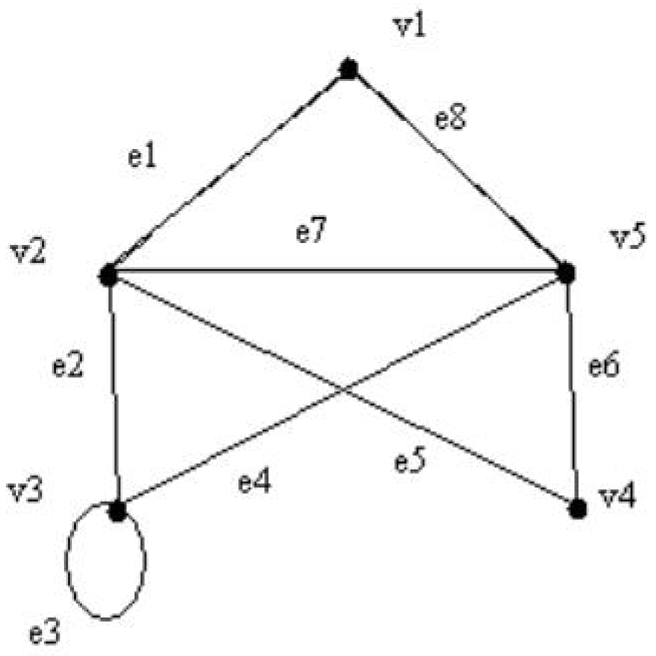


A　　　　B　　　　C　　　　D

欧拉问题

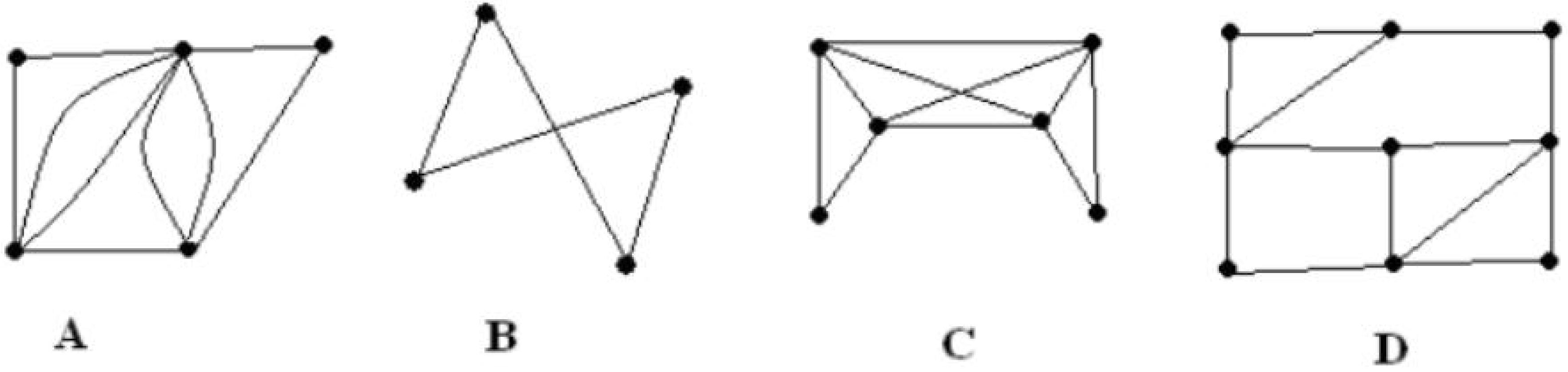
e1-e2-e3-e4-e5-e6-e7-e8

8．下图的一条欧拉回路是________________________________。



欧拉问题

（ ）14. 下图中 ______不存在欧拉回路 D



（ ）15. 一个连通图 G 具有以下_____条件时，能一笔画出：即从某结点出发，经过图中每边仅一次回到该结点。

A. G 没有奇数度结点

B. G 有一个奇数度结点

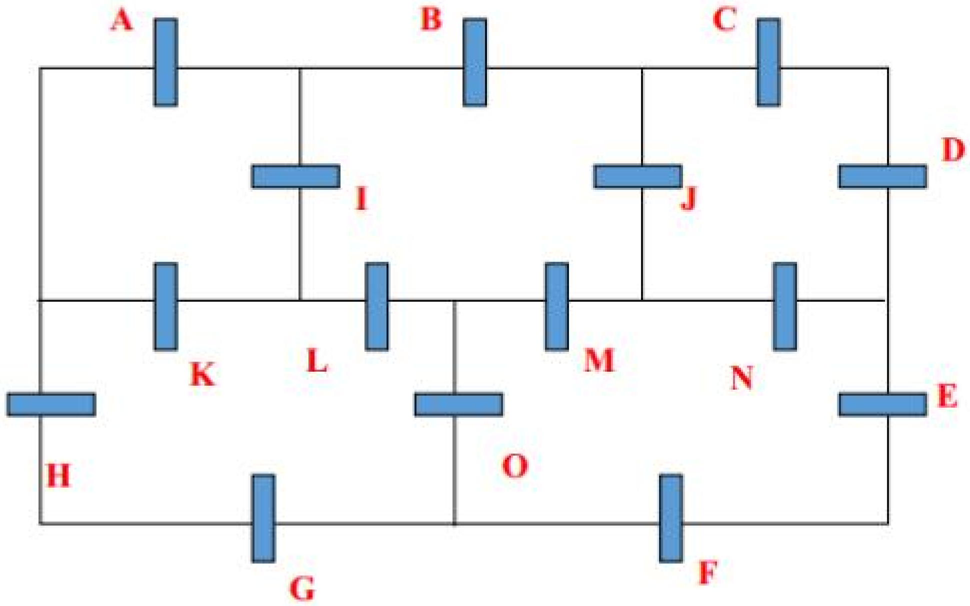
C. G 有 2 个奇数度结点

D. G 没有或有 2 个奇数度结点

A

欧拉问题

A八B五、(10’) 某国展中心参观路线的俯视图如下所示，问是否存在一条路过各门一次？试说明理由。

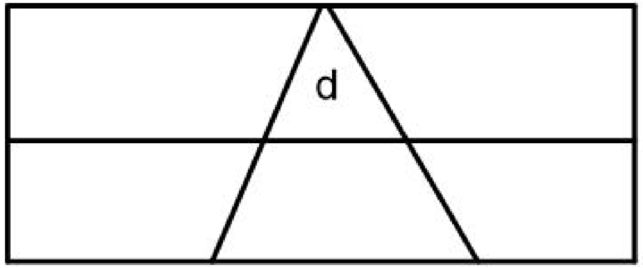


不存在，因为有4个房间度为奇数

欧拉问题

下图是一所房子的俯视图，除了粗边代表的墙以外，每一面墙都有一个门。问能否从某个房间开始过每扇门一次且仅一次最后返回。

答：将粗边缩为一个点，问题归结为下图的对偶图是否存在欧拉回路。

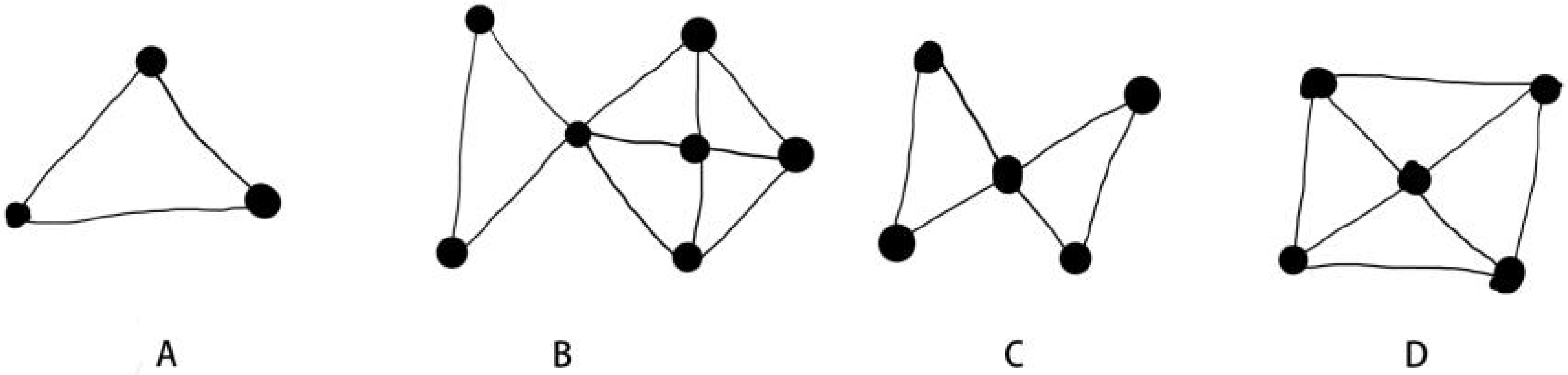


由于 d 的在的域的边界为 3，则相应对偶图该点的度为 3，根据欧拉回路的充要条件知无欧拉回路，--5’

所以不可能从某个房间开始过每扇门一次且仅一次最后返回。--3’

哈密顿/欧拉问题

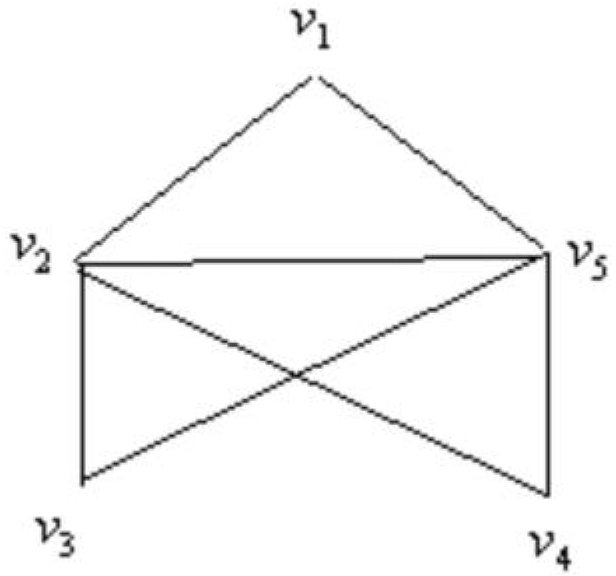
下列各图中，既没有欧拉回路也没有哈密顿回路的图是　　B



哈密顿/欧拉问题

7. 在下图中，求一条欧拉回路V1V2V4V5V3V2V5V1。

答案多种



8. 上图中的H回路是 无 。

哈密顿/欧拉问题

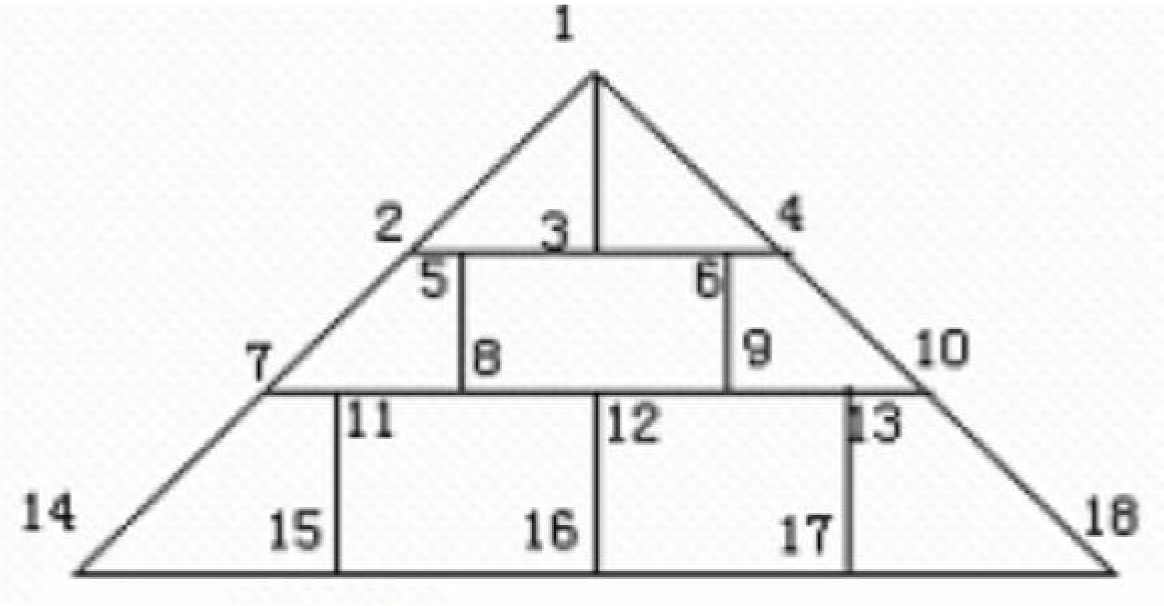
五. 答: (1')不存在欧拉回路,

(1')因为无向连通图存在欧拉回路的充要条件是各结点的度都是偶数,而此图中结点 1 度为 3.

(1')存在哈密顿回路:

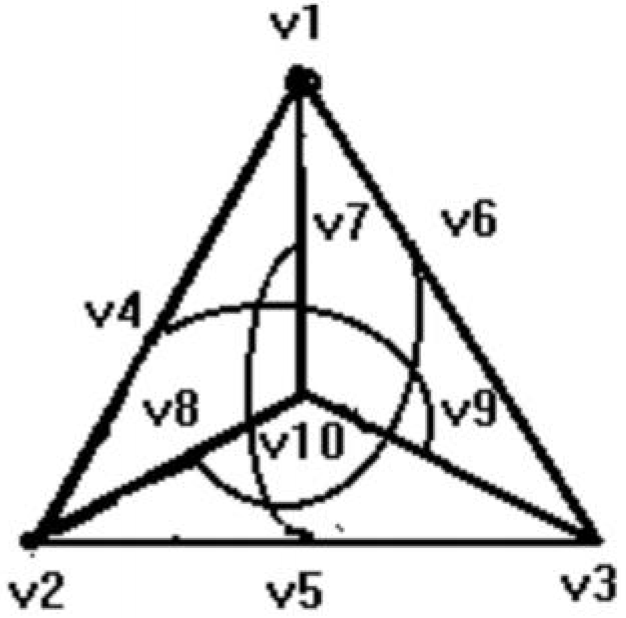
(1') 1—2—5—8—11—7—14—15—16—12—9—13—17—18—10—4—6—3—1。]。

(1')是可平面图



哈密顿/欧拉问题

六.（8'）判断下图是否为欧拉图、哈密尔顿图，如果是，则给出欧拉回路、哈密尔顿回路，否则证明它不是。



非欧拉图，（2'）　因为奇度数结点　（2'）

非哈密尔顿图（2'）　同构于 Perterson 图，Perterson 图非哈密尔顿图（2'）

哈密顿/欧拉问题

1、（7 分）下图至少要添加___1___条边才能使它含有哈密顿回路，至少要添加___5___条边才能使它含有欧拉回路。并请标出相应的哈密顿回路和欧拉回路。