第一章补充题

概念问题

（ ）18. 下面说法错误的是_____

A

A. 邻接矩阵能表示自环，也能表示重边

B. 有向图邻接矩阵的第 i 行非零元的数目恰好是 v_i 的正度。第 j 列非零元的数目是 v_j 的负度

C. 关联矩阵能表示重边，不能表示自环

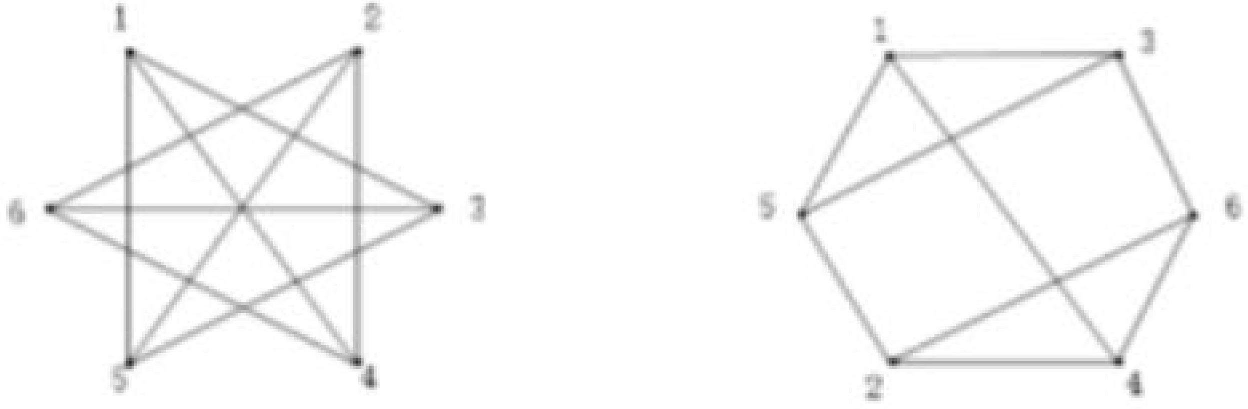
D. 有向图关联矩阵第 i 行中 1 的数目是 v_i 的正度，-1 的数目是 v_i 的负度。

3. 含 n 个结点的简单图共有 $\underline{2^{n(n-1)/2}}$ 个。

同构问题

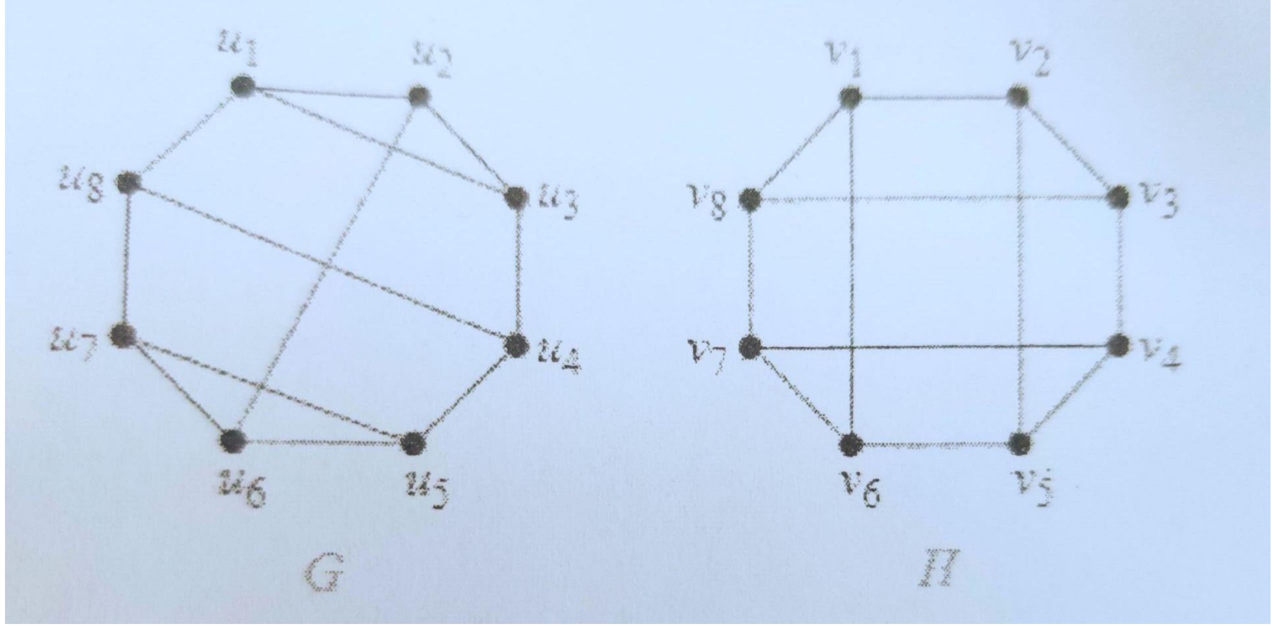
- 6个人围成圆形就坐，每个人恰好只与相邻者不认识，是否可以重新入座，使每个人都与邻座认识?

答：可以。原题可转化为寻找同构图的问题。由以下两图同构可得。



同构问题

- 判断下面两图是否同构。是，找出映射；否，说明理由。

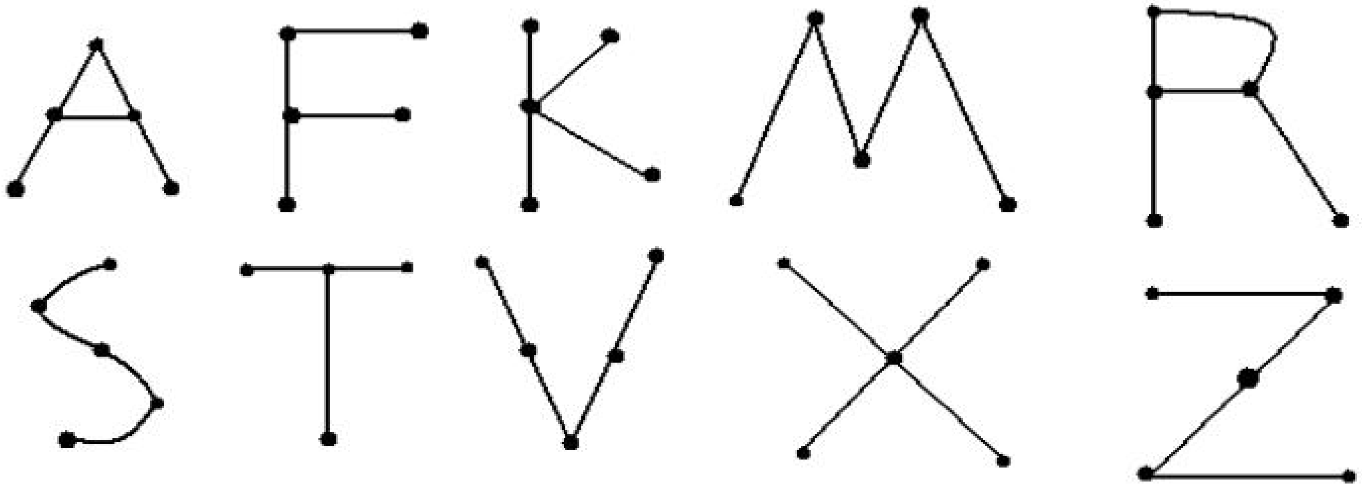


答：不同构。图G中由u1,u2,u3构成的导出子图，图H不存在同构的导出子图。

同构问题

（ ）20. 下列图中，和 M 图同构的图（不计 M 图本身）有______个

C



A. 1

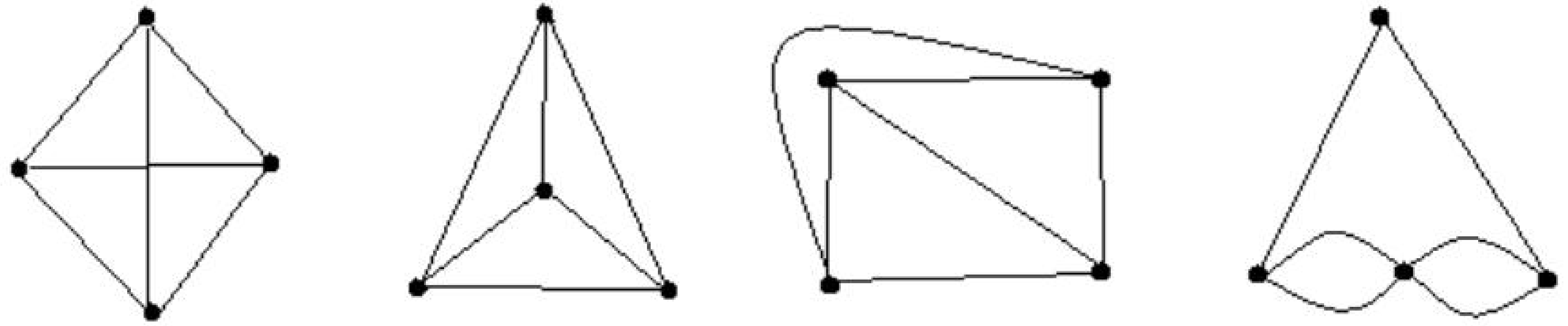
B. 2

C. 3

D. 4

同构问题

（　）17.　下面图中______与其它图不同构　　D

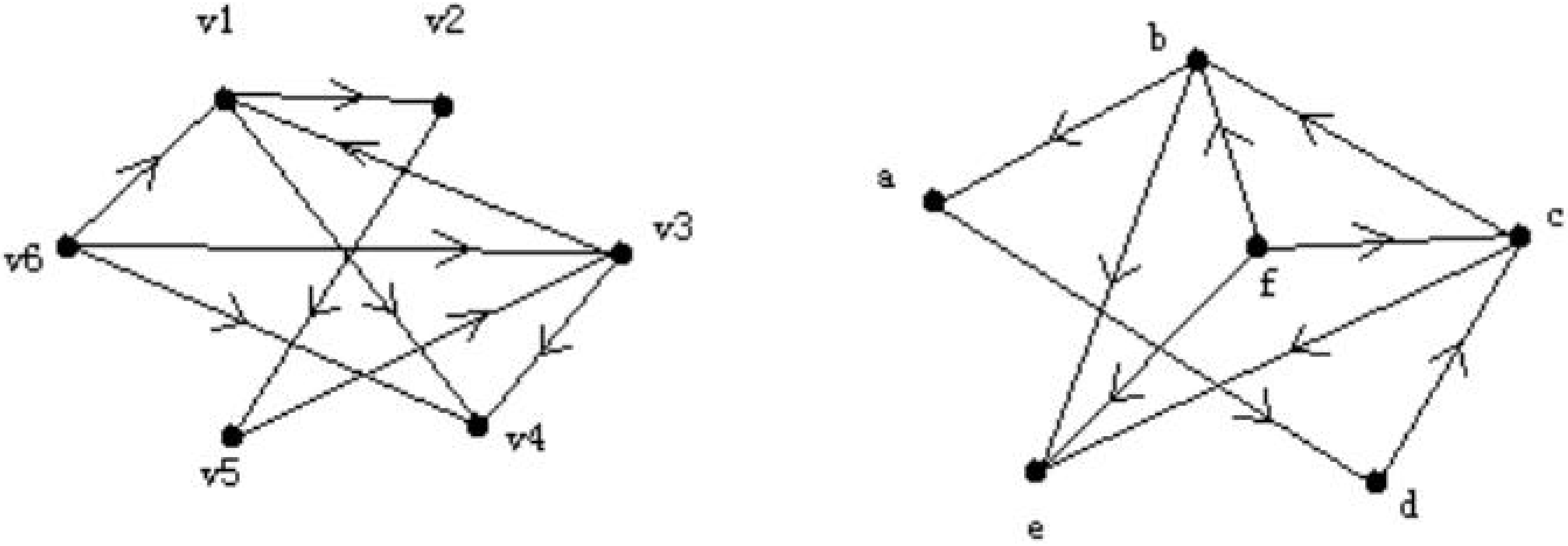


A　　B　　C　　D

8. 结点数小于等于 4 的不同构的树共有____5____种.

同构问题

11 . 下面两个有向图的同构映射为



f (v1)=b, f (v2)=a, f (v3)=c, f (v4)=e, f (v5)=d, f (v6) =f

度问题

- 设G是不存在三角形的简单图，证明:

$$1.\ \sum d^2(v_i) \le mn;$$

$$2.\ m \le \frac{n^2}{4}.$$

度问题

- 设G是不存在三角形的简单图，证明:

$$1.\ \sum d^2(v_i) \le mn;$$

答： 1. 对图中一条边，记其端点为 v_i, v_j，由于图中不存在三角形，有：

$$d(v_i) + d(v_j) \le n$$

对所有边列出上式相加，可得

$$\sum d^2(v_i) \le mn$$

左边为 $\sum d^2(v_i)$ 是因为值为 $d(v_i)$ 的项恰被计算了 $d(v_i)$ 次。

度问题

- 设G是不存在三角形的简单图，证明:

$$2.\ m \le \frac{n^2}{4}.$$

2. 设图中度最大的一个节点 v_0 度为 k $(0 \le k \le n-1)$. 则可以将所有节点分为三类: v_0, 和 v_0 直接相连的 k 个节点，和其他的 $(n-1-k)$ 个节点。图中的边有两类: 和 v_0 直接相连的边，共有 k 条; 以及和第三类的 $(n-1-k)$ 个节点相连的边，最多有 $k \times (n-1-k)$ 条。故

$$\begin{aligned} m &\le k + k \times (n-1-k) \\ &= k \times (n-k) \\ &\le \frac{n^2}{4}. \end{aligned}$$

度问题

- 设G是有n个节点的简单图(n>2且n为奇数)。证明：G与G¯中奇数度节点个数相等。

证明： 设 $v_1, v_2, \ldots, v_i$ 为图 G 的奇数度节点，$v_{i+1}, \ldots, v_n$ 为偶数度节点。则补图 $\bar{G}$ 中，$v_1, v_2, \ldots, v_i$ 的度

$$d'(v_i) = n - 1 - d(v_i)$$

为奇数，因为 n 是奇数，且 $d(v_i)$ 也是奇数。同理，$d'(v_{i+1}), \ldots, d'(v_n)$ 均是偶数。

故图 G 与 $\bar{G}$ 的奇数度节点个数相等。 □

度问题

9. 以下数字序列是某简单图的度序列的是（　　　　）. A

（A）(11123)　　（B）. (233445)　　（C）. (23445)　　（D）. (1333)

4、无向图 G 有 6 条边，度数为 3 和 5 的顶点各 1 个，其余都为度数为 2 的结点，则该图有（　）个结点 B

A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

1、下列＿＿＿＿＿序列可以作为一个简单图的顶点的度序列。 B

A. 5,4,3,2,2　B. 4,4,3,3,2　C. 4,4,3,3,2,1　D. 5,4,4,3,2,0

3、10 个顶点的简单图 G 中有 4 个奇度数顶点，则 G 的补图中有＿＿＿＿＿个奇度数顶点。 C

A. 4　B. 5　C. 6　D. 不确定

度问题

( ) 16. 一个无向图有五个结点，其中 4 个的度数是 1, 2, 3, 4，则第 5 个结点的度数不可能是______

D

A. 0

B. 2

C. 4

D. 5

( ) 12. 一个无向图有四个结点，其中 3 个的度数是 2, 3, 3，则第 4 个结点的度数不可能是______

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

B

9. 设图G=（V, E）有7个结点，其中6个结点的度都为3，一个结点的度为6，则该图有 ________ 条边。

12

度问题

13. 在一个有向图中，所有顶点的入度之和等于所有边数的（ ）倍。

A. 1 / 2

B. 1

C. 2

D. 4

B

（··）18. 已知图 G 中有 11 条边，1 个 4 度顶点，4 个 3 度顶点，其余顶点的度数均不大于 2，则 G 中至少有 ______ 个顶点。

A. 9

B. 8

C. 7

D. 6

B

11. 已知图 G 中有 1 个 1 度结点，3 个 2 度结点，1 个 3 度结点，1 个 4 度结点，则 G 的边数是（ ）

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

C

度问题

五、(8 分) • 证明：小于 30 条边的简单平面图中有一个顶点的度数小于等于 4.

五、(8 分) 证明：小于 30 条边的简单平面图中有一个顶点的度数小于等于 4.

证明：假设每个顶点的度数均大于 4，即 $d(v_i) \geq 5$. 因为

$$2m = \sum_{i=1}^{v} d(v_i) \geq 5n, \text{即 } n \leq \frac{2}{5} m, \text{——————————— 3 分}$$

由于 $m \leq 3n - 6$, 代入后得到 $m \leq \frac{6}{5} m - 6$, 即有 $m \geq 30$, 与边数小于 30 相矛盾。—— 5 分

度问题

七、(8')设 G 是简单平面图，证明 G 中至少有一个结点的度数小于等于 5.

证明：假设 G 中每个结点的度数均大于等于 6，则

$$2m=\sum_{i=1}^{n} d(v_i)\geq 6n$$，其中 m 为边数，n 为结点数

于是：$m\geq 3n>3n-6$

而由于 G 是连通的简单平面图，有 $m\leq 3n-6$，与上式矛盾

因此 G 中至少有一个结点的度数小于等于 5

图的表示问题

11. 设图 G 的邻接矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

D

则 G 的顶点数与边数分别为哪项？

(A) 4, 5　(B) 5, 6　(C) 4, 10　(D) 5, 8

图的表示问题

10．有向图 G 的关联矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

则其邻接矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

应用题1答案

在约克阿尔昆(735-804)提出的一个古老智力游戏中，一位农夫需要将一匹狼、一只山羊和一棵白菜带过河.农夫只有一只小船，小船每次只能载农夫和一件物品(一只动物或者白菜).农夫可以重复渡河，但如果农夫在河的另一边.那么狼会吃羊，类似地，羊会吃白菜.

可以通过列出两岸各有什么来描述问题的每个状态. 例如，可以用有序对(FG,WC)表示农夫和羊在一岸，而狼和白菜在另一岸的状态. [F 表示农夫，G 表示山羊，W 表示狼，C 表示白菜，⌀表示岸上什么也没有. 问题的初始状态就是(FGWC, ⌀).]

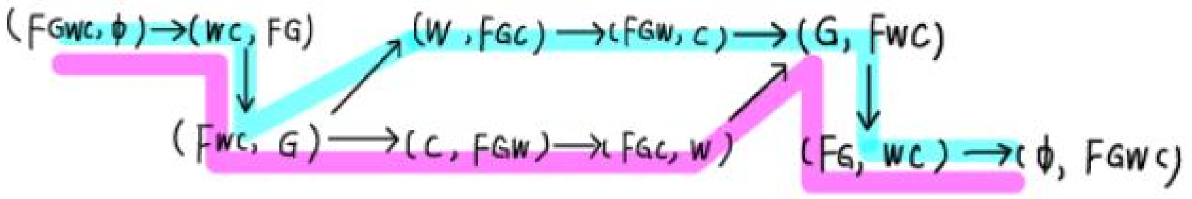
(1) 找出这个游戏所有的允许状态，其中不能出现在没有农夫的情况下，让狼和羊，或者羊和白菜在同一岸上. (3 分)
(2) 构造一个图，使得图中的每一个顶点表示一个允许的状态，如果可以通过一次船的运输从一个状态转换到另一个状态，那么相应的顶点之间用一条边相连. (3 分)
(3) 找出这个游戏的两个不同解，每个解都使用 7 次渡河. (2 分)

解：(1) 不考虑约束条件共$2^4=16$种状态，

(FGWC, φ) (FG, WC) ~~(F, WGC)~~
(FGW, C) ~~(FW, GC)~~ (G, FWC)
(FGC, W) ~~(FC, WG)~~ (W, FGC)
(FWC, G) (WC, FG) (C, FGW)
~~(GWC, F)~~ ~~(GC, FW)~~ (φ, FGWC)
~~(WG, FC)~~

删去不满足题意的情况，共10种状态.

(2)



(3) 两种方案如上图所示。

证明题

- 证明9个人之中若非至少有4个人相互认识，则至少有3个人相互不认识。

引理:六个人中必有三个人相互认识或相互不认识。 (拉姆塞定理)

引理证明：设其中一人为A。

若A认识其中三个人，则若三个人之间相互不认识，得证。若三人之中有两人相互认识，则加上A，三人相互认识。

若A不认识其中三个人，则若三个人之间相互认识，得证。若三人之中有两人相互不认识，则加上A，三人相互不认识。

证明:

若九个人中存在一个人不认识其中四个人，设其为A。则若四个人相互认识，存在4个人相互认识；若四个人中有两人相互不认识，则加上A，存在3个人相互不认识。

若全部九个人都认识至少五个人，则至少有一个人认识至少六个人(图中度为奇数的节点必有偶数个)。则由引理：六个人中有三人互相认识，加上A就有4个人相互认识；或者六个人里有三个人互不认识。得证。