



第十一章 函数

马汝辉 副研究员、博导
上海交通大学
2025 年 12 月



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

函数



上一章研究了关系的自反、传递、对称等性质，并针对这些性质研究了一些特殊的关系，如等价关系、偏序关系。这一章研究各类函数是另外一些特殊的关系，这是从它们的单值性、定义域和值域的性质来讨论的。函数是一个基本的数学概念。通常的实函数是在实数集合上讨论的。这里推广了实函数概念，讨论在任意集合上的函数。

1

11.1 函数和选择公理

2

11.2 函数的合成与函数的逆

- 函数的两个条件可以写成

$$(1) \quad (\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)((x f y_1 \wedge x f y_2) \rightarrow y_1 = y_2),$$

$$(2) \quad (\forall x)(x \in A \rightarrow (\exists y)(y \in B \wedge x f y)).$$

- 函数的第一个条件是单值性，定义域中任一 x 与 B 中唯一的 y 有关系。因此可以用 $f(x)$ 表示这唯一的 y 。第二个条件是 A 为定义域， A 中任一 x 都与 B 中某个 y 有关系。注意不能把单值性倒过来。对 A 到 B 的函数 f ，当 $x_1 f y$ 且 $x_2 f y$ 成立时，不一定 $x_1 = x_2$ 。因此，函数的逆关系不一定是函数。
- 如果一个关系是函数，则它的关系矩阵中每行恰好有一个 1，其余为 0，它的关系图中每个 A 中的顶点恰好发出一条有向边。

例 1

对实数集 \mathbb{R} , \mathbb{R} 上的关系 f 为

$$f = \{\langle x, y \rangle \mid y = x^3\}$$

f 是从 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的函数, 记作 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 并记作 $f: x \mapsto x^3$ 或 $f(x) = x^3$.

例 2

集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的两个关系

$$g = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$$

和

$$h = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

都不是从 A 到 A 的函数.

因为 g 没有单值性, 即 $\langle 3, 1 \rangle \in g$ 且有 $\langle 3, 2 \rangle \in g$, 而对关系 h , $\text{dom}(h) = \{1, 2\} \neq A$. 但是, h 是从 $\{1, 2\}$ 到 A 的函数.

定义 11.1.2

对集合 A 和 B , 从 A 到 B 的所有函数的集合记为 A_B (有的书记为 B^A)。于是, $A_B = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$ 。

例 3

对 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$ 。从 A 到 B 的函数有 8 个:

$$f_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\},$$

$$f_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\},$$

$$f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\},$$

$$f_4 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\},$$

$$f_5 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\},$$

$$f_6 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\},$$

$$f_7 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\},$$

$$f_8 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\}.$$

于是

$$A_B = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_8\}.$$

- 若 A 和 B 是有限集合, 且 $|A| = m$, $|B| = n$, 则 $|A_B| = n^m$ 。从 \emptyset 到 \emptyset 的函数只有 $f = \emptyset$, 从 \emptyset 到 B 的函数只有 $f = \emptyset$ 。若 $A \neq \emptyset$, 从 A 到 \emptyset 的函数不存在。因此, $\emptyset_\emptyset = \emptyset_B = \{\emptyset\}$, $A_\emptyset = \emptyset$ (对 $A \neq \emptyset$)。

定义 11.1.3

设 $f: A \rightarrow B$, $A_1 \subseteq A$, 定义 A_1 在 f 下的象 $f[A_1]$ 为

$$f[A_1] = \{y \mid (\exists x)(x \in A_1 \wedge y = f(x))\}.$$

把 $f[A]$ 称为函数的象。

设 $B_1 \subseteq B$, 定义 B_1 在 f 下的完全原象 $f^{-1}[B_1]$ 为

$$f^{-1}[B_1] = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}.$$

注意, 在上一章中 f^{-1} 表示 f 的逆关系。这个定义中的 $f^{-1}[B_1]$ 表示完全原象, 可以认为其中的 f^{-1} 是 f 的逆关系。因为函数的逆关系不一定是函数, 所以 f^{-1} 一般只表示逆关系, 不是逆函数 (除非特别说明)。

例 4

函数 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{当 } x \text{ 为偶数} \\ \frac{x-1}{2}, & \text{当 } x \text{ 为奇数} \end{cases}$$

则

$$f[\mathbb{N}] = \mathbb{N},$$

$$f[\{-1, 0, 1\}] = \{-1, 0\},$$

$$f^{-1}[\{2, 3\}] = \{4, 5, 6, 7\}.$$

特别地

$$f[\emptyset] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset.$$

- 等价关系和函数都是特殊的关系。同样可以定义一些特殊的函数，它们是具有某种性质的函数，

定义 11.1.4

设 $f: A \rightarrow B$ 。

- ① 若 $\text{ran}(f) = B$ ，则称 f 是满射的，或称 f 是 A 到 B 上的；
- ② 若对任意的 $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ ，都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，则称 f 是单射的，或内射的，或一对一的；
- ③ 若 f 是满射的又是单射的，则称 f 是双射的，或一对一 A 到 B 上的，简称双射。

如果 $f: A \rightarrow B$ 是满射的，则对任意的 $y \in B$ ，存在 $x \in A$ ，使 $f(x) = y$ 。如果 $f: A \rightarrow B$ 是单射的，则对任意的 $y \in \text{ran}(f)$ ，存在唯一的 $x \in A$ ，使 $f(x) = y$ 。

例 5

函数 $f: \{1, 2\} \rightarrow \{0\}$, 定义为 $f(1) = f(2) = 0$, 是满射的, 不是单射的。函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 定义为 $f(x) = 2x$, 是单射的, 不是满射的。函数 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, 定义为 $f(x) = x + 1$, 是双射的。

特别地, $\emptyset: \emptyset \rightarrow B$ 是单射的, $\emptyset: \emptyset \rightarrow \emptyset$ 是双射的。

- 给定两个集合 A 和 B , 是否存在从 A 到 B 的双射函数? 怎样构造从 A 到 B 的双射函数? 这是两个很重要的问题。第一个问题在下一章讨论。下面举例说明第二个问题。

例 6

对下列的集合 A 和 B , 分别构造从 A 到 B 的双射函数:

- ① $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, \mathbb{R}$ 是实数集。
- ② $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$ 。
- ③ $A = [0, 1), B = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 都是实数区间。
- ④ $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, B = \mathbb{N}$ 。

解

- ① 令 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ 。
- ② 令 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = e^x$ 。
- ③ 令 $f: [0, 1) \rightarrow (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$ 。

在 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 中，元素的排列次序是： $\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \dots$ 。图中用箭头表示次序，这相当于 $f(\langle 0, 0 \rangle) = 0, f(\langle 0, 1 \rangle) = 1, f(\langle 1, 0 \rangle) = 2, f(\langle 0, 2 \rangle) = 3, \dots$ 。

显然， $\langle m, n \rangle$ 所在的斜线上有 $m + n + 1$ 个点。在此斜线上方，各行元素分别有 $1, 2, \dots, m + n$ 个，这些元素排在 $\langle m, n \rangle$ 以前。在此斜线上， m 个元素排在 $\langle m, n \rangle$ 以前。排在 $\langle m, n \rangle$ 以前的元素共有 $[1 + 2 + \dots + (m + n)] + m$ 个。于是，双射函数 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 为

$$f(\langle m, n \rangle) = \frac{(m + n)(m + n + 1)}{2} + m.$$

- 对无限集合 A ，若存在从 A 到 \mathbb{N} 的双射函数，就可仿照这种方法，把 A 中元素排成一个有序图形，按次序数遍 A 中元素。这就构造了从 A 到 \mathbb{N} 的双射函数。

定义 11.1.5

设 $f: A \rightarrow B$, 如果存在一个 $y \in B$, 使得对所有的 $x \in A$, 有 $f(x) = y$, 即有 $f[A] = \{y\}$, 则称 $f: A \rightarrow B$ 为常函数。

定义 11.1.6

A 上的恒等关系 $I_A: A \rightarrow A$ 称为恒等函数。于是, 对任意的 $x \in A$, 有

$$I_A(x) = x.$$

定义 11.1.7

对实数集 \mathbb{R} , 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 如果 $(x \leq y) \rightarrow (f(x) \leq f(y))$, 则称 f 为单调递增的; 如果 $(x < y) \rightarrow (f(x) < f(y))$, 则称 f 为严格单调递增的。类似可定义单调递减和严格单调递减的函数。

定义 11.1.8

对集合 $A, n \in \mathbb{N}$, 把函数 $f: A^n \rightarrow A$ 称为 A 上的 n 元运算。

运算是算术运算概念的推广。在代数结构课程中将对运算作深入研究。运算的例子有数字的运算, 集合的运算, 关系的运算, 逻辑联结词是在 $\{T, F\}$ 上的运算。

定义 11.1.9

设 A, B, C 是集合, B_C 为从 B 到 C 的所有函数的集合, 则 $F: A \rightarrow B_C$ 称为一个泛函 (有时 $G: B_C \rightarrow A$ 称为一个泛函)。

泛函 F 也是函数, 它把 A 的元素 a 映射到从 B 到 C 的函数 $f: B \rightarrow C$ 。即函数值 $F(a)$ 是函数 $f: B \rightarrow C$ 。

例 7

泛函 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathbb{R}}$, $F(a) = (f(x) = x + a)$ 。或写成 $F: a \mapsto [x \mapsto x + a]$ 。于是

- $F(2)$ 对应函数 $x \mapsto x + 2$,
- $F(2)(3) = 3 + 2 = 5$.
- $F(6)$ 对应函数 $x \mapsto x + 6$,
- $F(6)(3) = 3 + 6 = 9$.

泛函值 $F(2)$ 有双重含义: 一方面表示 2 下 F 的函数值为 $F(2)$, 另一方面这个值是一个函数 $F(2): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(2): x \mapsto x + 2$ 。

定义 11.1.10

设 E 是全集，对任意的 $A \subseteq E$ ， A 的特征函数 χ_A 定义为：

$$\chi_A : E \rightarrow \{0, 1\}, \chi_A(a) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

例 8

设 $E = \{a, b, c\}$, $A = \{a, c\}$ ，则

$$\chi_A(a) = 1, \chi_A(b) = 0, \chi_A(c) = 1.$$

- 特征函数是集合的另一种表示方法。模糊集合论就是参照特征函数的思想，用隶属函数定义模糊集合。

选择公理 (形式 1)

对任意的关系 R , 存在函数 f , 使得 $f \subseteq R$ 且 $\text{dom}(f) = \text{dom}(R)$ 。

- 选择公理是一个重要的数学公理, 有时记作 AC 。选择公理还有其他的等价形式, 这里的形式最直观, 最容易理解。
- 一般的关系 R 不是函数, 因为 R 不是单值的。也就是对某些 $x \in \text{dom}(R)$, 有多于一个 y_1, y_2, \dots , 使 $y_1 \in \text{ran}(R), y_2 \in \text{ran}(R), \dots$, 且 $\langle x, y_1 \rangle \in R, \langle x, y_2 \rangle \in R, \dots$ 。这时 x 有多个值 y_1, y_2, \dots 与之对应。为了构造函数 f , 只要对任意的 $x \in \text{dom}(R)$, 从 $\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle, \dots$ 中任取一个放入 f 中。则 f 是单值的, $f \subseteq R$, 且有 $\text{dom}(f) = \text{dom}(R)$ 。 f 是函数 $f: \text{dom}(R) \rightarrow \text{ran}(R)$ 。因为多个有序对中可任选其一, 所以构造的 f 可以有多个。

例 10

设关系 $R = \{\langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle\}$, 则 $f_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle\}$ 和 $f_2 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle\}$ 都是满足条件的函数。



11.1 函数和选择公理



11.2 函数的合成与函数的逆

11.2 函数的合成与函数的逆



函数是特殊的关系，所以关于关系合成与关系的逆的定理，都适用于函数。下面讨论函数的一些特殊性质



11.2.1 函数的合成

定理 11.2.1

设 $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$, 则

- ① $f \circ g$ 是函数 $f \circ g: A \rightarrow C$,
- ② 对任意的 $x \in A$, 有 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

证明

- ① 因为 $g: A \rightarrow B$, 则 $(\forall x)(x \in A \rightarrow (\exists y)(y \in B \wedge \langle x, y \rangle \in g))$. 又因 $f: B \rightarrow C$, 则 $(\forall y)(y \in B \rightarrow (\exists z)(z \in C \wedge \langle y, z \rangle \in f))$. 由任意的 $x \in A$, 存在 $y \in B$ 有 $\langle x, y \rangle \in g$, 对 $y \in B$ 存在 $z \in C$ 有 $\langle y, z \rangle \in f$, 因此对 $x \in A$ 存在 $z \in C$ 使 $\langle x, y \rangle \in g \wedge \langle y, z \rangle \in f$, 使 $\langle x, z \rangle \in f \circ g$. 所以 $\text{dom}(f \circ g) = A$, 假设对任意的 $x \in A$, 存在 y_1 和 y_2 , 使得 $\langle x, y_1 \rangle \in f \circ g$ 且 $\langle x, y_2 \rangle \in f \circ g$. 则 $(\exists t_1)(\exists t_2)((xgt_1 \wedge t_1fy_1) \wedge (xgt_2 \wedge t_2fy_2))$. 因为 g 是函数, 则 $t_1 = t_2$, 又因 f 是函数, 则 $y_1 = y_2$. 所以 $f \circ g$ 是函数.

11.2.1 函数的合成

- ② 对任意的 $x \in A$, 因为 $\langle x, g(x) \rangle \in g, \langle g(x), f(g(x)) \rangle \in f$, 故 $\langle x, f(g(x)) \rangle \in f \circ g$.
 又因 $f \circ g$ 是函数, 则可写为 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
 函数的合成可以用图 11.2.1 表示. 从图中可见
 $\text{dom}(g) = A, \text{ran}(g) \subseteq B = \text{dom}(f), \text{ran}(f) \subseteq C$. 而
 $\text{dom}(f \circ g) = A, \text{ran}(f \circ g) \subseteq C$.

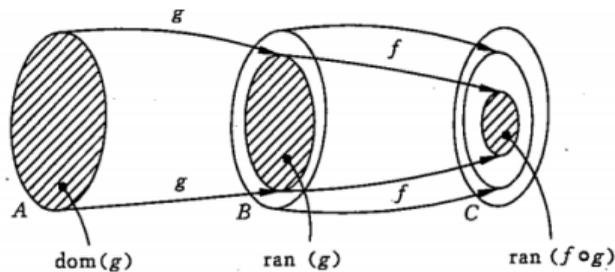


图: 11.2.1

定理 11.2.2

设 $g : A \rightarrow B, f : B \rightarrow C$, 则有

- ① 若 f, g 是满射的, 则 $f \circ g$ 是满射的,
- ② 若 f, g 是单射的, 则 $f \circ g$ 是单射的,
- ③ 若 f, g 是双射的, 则 $f \circ g$ 是双射的。

证明

- ① 对任意的 $z \in C$, 因为 f 是满射的, 故 $\exists y \in B$, 使 $f(y) = z$. 对这个 $y \in B$, 因为 g 是满射的, 故 $\exists x \in A$, 使 $g(x) = y$. 所以, $z = f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$, $f \circ g$ 是满射的。

11.2.1 函数的合成

② 对任意的 $z \in \text{ran}(f \circ g)$, 若存在 x_1, x_2 , 使 $(f \circ g)(x_1) = z$ 且 $(f \circ g)(x_2) = z$. 则存在 y_1, y_2 , 使 $x_1 g y_1 \wedge y_1 f z$ 且 $x_2 g y_2 \wedge y_2 f z$. 因为 f 是单射的, 故 $y_1 = y_2$; 又因 g 是单射的, 故 $x_1 = x_2$. 所以, $f \circ g$ 是单射的。

③ 由 (1)、(2) 得证。

这个定理的逆定理是否成立呢? 请看下列定理。

11.2.1 函数的合成

- ② 对任意的 $y \in \text{ran}(g)$, 若存在 $x_1, x_2 \in A$, 使 $x_1gy \wedge x_2gy$, 即 $g(x_1) = y = g(x_2)$. 对这个 $y \in B$, (因 $\text{ran}(g) \subseteq B$), 存在 $z \in C$, 使得 $f(y) = z$. 则 $f(g(x_1)) = z = f(g(x_2))$, 于是 $x_1(f \circ g)z \wedge x_2(f \circ g)z$. 因为 $f \circ g$ 是单射的, 故 $x_1 = x_2$. 所以 g 是单射的。
- ③ 由 (1), (2) 得证。

注意, 当 $f \circ g$ 是满射的, g 不一定是满射的; 当 $f \circ g$ 是单射的, f 不一定是单射的。

11.2.2 函数的逆



一个关系的逆不一定是函数，一个函数的逆也不一定是函数.

例 3

对 $A = \{a, b, c\}$. A 上的关系 R 为

$$R = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, a \rangle\},$$

从 A 到 A 的函数 f 为

$$f = \{\langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle\}.$$

则它们的逆为

$R^{-1} = \{\langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle, \langle a, a \rangle\}$ 是 A 到 A 的函数,

$f^{-1} = \{\langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle a, c \rangle\}$ 不是 A 到 A 的函数。

定理 11.2.5

若 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 则 f^{-1} 是函数 $f^{-1}: B \rightarrow A$.

证明: 对任意的 $y \in B$, 因为 f 是双射的, 所以存在 $x \in A$, 使 $\langle x, y \rangle \in f$, $\langle y, x \rangle \in f^{-1}$. 所以, $\text{dom}(f^{-1}) = B$.

对任意的 $y \in B$, 若存在 $x_1, x_2 \in A$, 使得 $\langle y, x_1 \rangle \in f^{-1}$ 且 $\langle y, x_2 \rangle \in f^{-1}$, 则 $\langle x_1, y \rangle \in f$ 且 $\langle x_2, y \rangle \in f$. 因为 f 是双射的, 故 $x_1 = x_2$. 所以, f^{-1} 是函数 $f^{-1}: B \rightarrow A$.

定义 11.2.1

设 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 则称 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 为 f 的反函数。

定理 11.2.6

若 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 则 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是双射的。

证明: 对任意的 $x \in A$, 因为 f 是从 A 到 B 的函数, 故存在 $y \in B$, 使 $\langle x, y \rangle \in f$, $\langle y, x \rangle \in f^{-1}$. 所以, f^{-1} 是满射的。

对任意的 $x \in A$, 若存在 $y_1, y_2 \in B$, 使得 $\langle y_1, x \rangle \in f^{-1}$ 且 $\langle y_2, x \rangle \in f^{-1}$, 则有 $\langle x, y_1 \rangle \in f$ 且 $\langle x, y_2 \rangle \in f$. 因为 f 是函数, 故 $y_1 = y_2$. 所以, f^{-1} 是单射的, 它是双射的。

例 4

$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ 是双射函数。所以,

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad f^{-1}(y) = \arcsin y$$

是 f 的反函数。

对实数集合 R , 正实数集合 R_+ , $g : R \rightarrow R_+$, $g(x) = 2^x$ 是双射的。所以,

$$g^{-1} : R_+ \rightarrow R, \quad g^{-1}(y) = \log_2 y$$

是 g 的反函数。

定理 11.2.7

若 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 则对任意的 $x \in A$, 有 $f^{-1}(f(x)) = x$, 对任意的 $y \in B$, 有 $f(f^{-1}(y)) = y$ 。

证明: 对任意的 $x \in A$, 因为 f 是函数, 则有 $\langle x, f(x) \rangle \in f$, 有 $\langle f(x), x \rangle \in f^{-1}$, 因为 f^{-1} 是函数, 则可写为 $f^{-1}(f(x)) = x$ 。

对任意的 $y \in B$, 类似可证 $f(f^{-1}(y)) = y$ 。

由定理, 对任意的 $x \in A$, $f^{-1}(f(x)) = x$, 则 $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, 于是 $f^{-1} \circ f = I_A$ 。同理也有, $f \circ f^{-1} = I_B$ 。对非双射的函数 $f: A \rightarrow B$, 是否存在函数 $g: B \rightarrow A$ 使 $g \circ f = I_A$ 呢? 是否存在函数 $h: B \rightarrow A$ 使 $f \circ h = I_B$ 呢?

定理 11.2.8

设 $f: A \rightarrow B, A \neq \Phi$, 则

- ① f 存在左逆, 当且仅当 f 是单射的;
- ② f 存在右逆, 当且仅当 f 是满射的;
- ③ f 存在左逆又存在右逆, 当且仅当 f 是双射的;
- ④ 若 f 是双射的, 则 f 的左逆等于右逆。

证明

- ① 先证必要性。设存在 $x_1, x_2 \in A$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 设 g 为 f 的左逆, 则

$$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2.$$

所以, f 是单射的。

11.2.2 函数的逆

再证充分性。因为 f 是单射的，所以 $f : A \rightarrow \text{ran}(f)$ 是双射的，则 $f^{-1} : \text{ran}(f) \rightarrow A$ 也是双射的。已知 $A \neq \Phi$ ，则 $\exists a \in A$ ，构造 $g : B \rightarrow A$ 为

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & \text{当 } y \in \text{ran}(f) \\ a, & \text{当 } y \in B - \text{ran}(f) \end{cases}$$

显然， g 是函数 $g : B \rightarrow A$ 。对任一 $x \in A$ ，有

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ ，所以， $g \circ f = I_A$ ， g 的构造如图，实箭头表示 g ，虚箭头表示 f 。

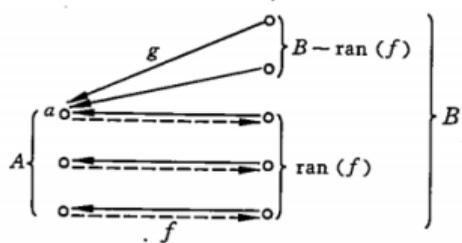


图: 11.2.3

- ② 先证必要性。设 f 的右逆为 $h : B \rightarrow A$, 有 $f \circ h = I_B$. 则对任意的 $y \in B$, 存在 $x \in A$, 使 $h(y) = x$, 则

$$y = I_B(y) = (f \circ h)(y) = f(h(y)) = f(x),$$

所以, f 是满射的。

11.2.2 函数的逆

再证充分性。(注意, 不能取 $h = f^{-1}$, 因为 f^{-1} 不一定是函数, 只是关系。) 因为 f 是满射的, 所以 $\text{ran}(f) = \text{dom}(f^{-1}) = B$. 依据选择公理, 对关系 f^{-1} , 存在函数 $h \subseteq f^{-1}$, 且有 $\text{dom}(h) = \text{dom}(f^{-1}) = B$, 且 $\text{ran}(h) \subseteq \text{ran}(f^{-1}) = A$. 即 $h: B \rightarrow A$, 对任意的 $y \in B$, 存在 $x \in A$, 使 $h(y) = x$ 且 $f(x) = y$. 则

$$(f \circ h)(y) = f(h(y)) = f(x) = y.$$

所以, $f \circ h = I_B$, h 是 f 的右逆。 h 的构造如图 11.2.4, 实箭头表示 h , 虚箭头表示 f .

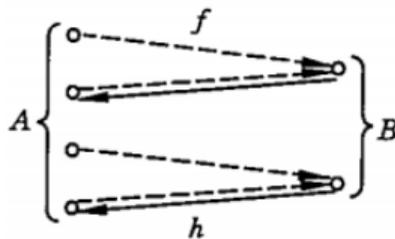


图: 11.2.4

谢谢



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

