第三次习题课

考试要点及例题讲解

集合的基本操作及性质

- 下列关于集合的说法不正确的是
- A. 存在 $H=\{x \mid x\text{是一个集合} \wedge x \notin x\}$
- B. $\varnothing \in \varnothing$.
- C. $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c,\{\{a,b\}\}\}$.
- D. 若 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$.

ABD

可用反证法证明集合 H 是不存在的. 假设存在这样的集合 H. 下面将证明，对某一具体事物 y，无法确定 y 是否属于 H. 我们以 H 本身作为这个具体事物 y，证明中 y 就是 H. 对于集合 H，必有 $y \in H$ 或 $y \notin H$，下面分别考虑之. (1) 若 $y \in H$. 由于 y 是 H 的元素，y 就具有 H 中元素的性质 $y \notin y$. 考虑到 y 就是 H，所以 $y \notin H$. 这与 $y \in H$ 矛盾. (2) 由于 y 不是 H 的元素，y 就没有 H 中元素的性质，因此 $y \in y$. 又因 y 就是 H，则 $y \in H$. 这与 $y \notin H$ 矛盾. 两种情况都存在矛盾，所以 $y \in H$ 和 $y \notin H$ 都不成立，集合 H 不存在. 问题的根源在于，集合论不能研究“所有集合组成的集合”. 这是集合论中的一个悖论，称为 Russell 悖论.

幂集和广义集合

- 写出 $\{\{a\},a\}$的幂集.

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{\{a\},a\}\}$$

- 写出 $\{\{1,\{2\}\}\}$的幂集.

$$P(A)=\{\varnothing,\{\{1,\{2\}\}\}\}$$

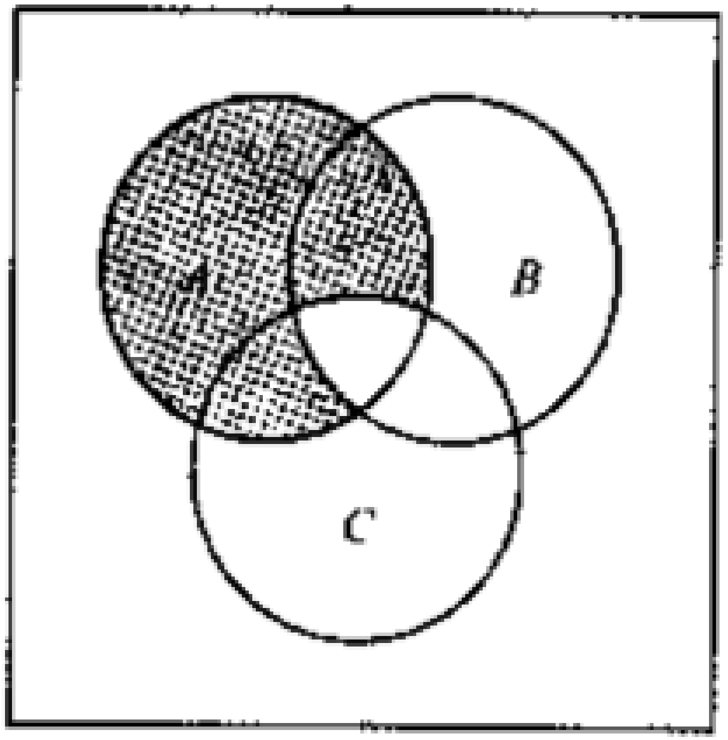
- 写出 $\bigcap\{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\}\}$.

$$\bigcap\{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\}\}=\{3\}$$

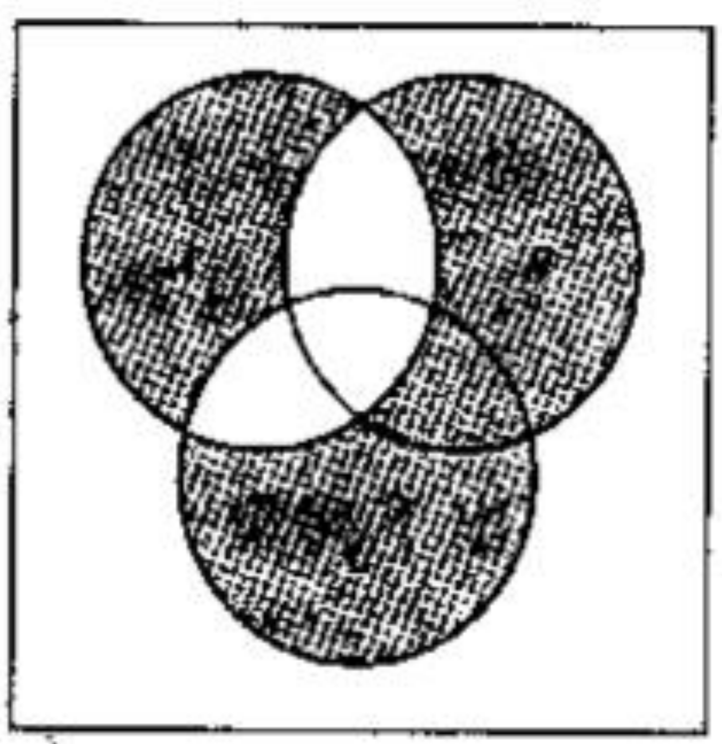
集合的图像表示

- 画出下列集合的文氏图

$A\cap(-B\cup -C)$.



$A\oplus(B\cup C)$.



关系及关系矩阵

设 $A=\{1,2,3\}$，在 A 上有多少不同的关系？设 $|A|=n$，在 A 上有多少不同的关系？

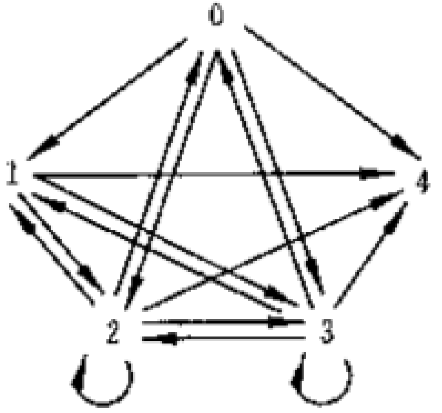
$A=\{1,2,3\}$时，A 上不同的关系有 $2^{3^2}=512$ 种.

$|A|=n$ 时，A 上不同的关系有 2^{n^2} 种.

对 $A=\{0,1,2,3,4\}$上的下列关系，给出关系图和关系矩阵.

$R_4=\{\langle x,y\rangle \mid x<y \text{ 或 } x \text{ 是质数}\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



关系的逆、合成

设集合 A 上的关系 R 为

$$A=\{a,\{a\},\{\{a\}\}\},$$
$$R=\{\langle a,\{a\}\rangle,\langle\{a\},\{\{a\}\}\rangle\}.$$

求 R^{-1}　$R\upharpoonright\{\{a\}\}$　$R\circ R$　$R[\{a\}]$

$$R^{-1}=\{\langle\{a\},a\rangle,\langle\{\{a\}\},\{a\}\rangle\}$$
$$R\upharpoonright\{\{a\}\}=\{\langle\{a\},\{\{a\}\}\rangle\}$$
$$R\circ R=\{\langle a,\{\{a\}\}\rangle\}$$
$$R[\{a\}]=\{\{a\}\}$$

对 X 到 Y 的关系 Q，Y 到 Z 的关系 S，Z 到 W 的关系 R

下列说法中正确的是

- A. $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$.
- B. $\operatorname{ran}(R^{-1})=\operatorname{dom}(R)$
- C. $(R\circ S)\circ Q=R\circ(S\circ Q)$
- D. $S\circ R\neq R\circ S$

ABCD

等价、相容、偏序、拟序

- 等价：自反+对称+传递
- 相容：自反+对称
- 偏序：自反+反对称+传递
- 拟序：非自反+反对称+传递

R 是 A 上自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to xRx)$，

R 是 A 上非自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \not R x)$.

R 是 A 上对称的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)$

$$((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy) \to yRx)$$

R 是 A 上反对称的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)$

$$((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx) \to x = y)$$

R 是 A 上传递的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)$

$$((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \to xRz).$$

函数的概念及性质

- 下列说法中正确的是
- A. $\{\langle x,y\rangle \mid x\in \mathbf{N} \land y\in \mathbf{N} \land x+y<10\}$ 是函数
- B. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-2x-15$ 是单射的
- C. $f:\mathbf{R}\to(0,\infty),\ f(x)=2^x$ 是双射的
- D. $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{N},\ f(x)=|x|$ 是满射的

CD

(1) 若 $\mathrm{ran}(f)=B$,则称 f 是满射的,或称 f 是 A 到 B 上的;

(2) 若对任意的 $x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2$,都有

$f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 是单射的,或内射的,或一对一的;

(3) 若 f 是满射的又是单射的,则称 f 是双射的,或一对一 A 到 B 上的. 简称双射.

函数的复合及逆

设 $f,g,h\in \mathbf{N}_{\mathbf{N}}$，$f(n)=n+1$，$g(n)=2n$，$h(n)=\begin{cases}0 & n\text{ 是偶数}\\ 1 & n\text{ 是奇数}\end{cases}$，求出 $f\circ f$，$f\circ g$，$g\circ f$，$g\circ h$，$h\circ g$，$(f\circ g)\circ h$.

$$f\circ f(n)=n+2,\ f\circ g(n)=2n+1,\ g\circ f(n)=2n+2,$$

$$g\circ h(n)=\begin{cases}1 & n\text{ 为偶数}\\ 1 & n\text{ 为奇数}\end{cases},\ h\circ g(n)=0,\ (f\circ g)\circ h(n)=\begin{cases}1 & n\text{ 为偶数}\\ 3 & n\text{ 为奇数}\end{cases}.$$

定义 11.2.2 设 $f:A\to B$，$g:B\to A$，如果 $g\circ f=I_A$，则称 g 为 f 的左逆；如果 $f\circ g=I_B$，则称 g 为 f 的右逆.

补充题讲解

9.1. 集合的概念和表示方法

( ) 1. 以下___不是集合

A. $\phi \times P(\phi)$ （P 表示幂集运算）

B. $\{x \mid x$是整数且$|x|$是素数$\}$

C. $\{x \mid x$是包含1的集合$\}$

D. $\{x \mid x$包含1且$x \subseteq R\}$

C

书P131

矛盾. 两种情况都存在矛盾，所以 $y \in H$ 和 $y \notin H$ 都不成立，集合 H 不存在. 问题的根源在于，集合论不能研究“所有集合组成的集合”. 这是集合论中的一个悖论，称为 Russell 悖论.

9.3. 集合的运算

( ) 10. 以下各项中正确的选项为______。

A. $\varnothing \cup \{\varnothing\} = \varnothing$

B. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing\}$

C. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\varnothing\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

D. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \varnothing = \{\{\varnothing\}\}$

B

大括号层级分清楚

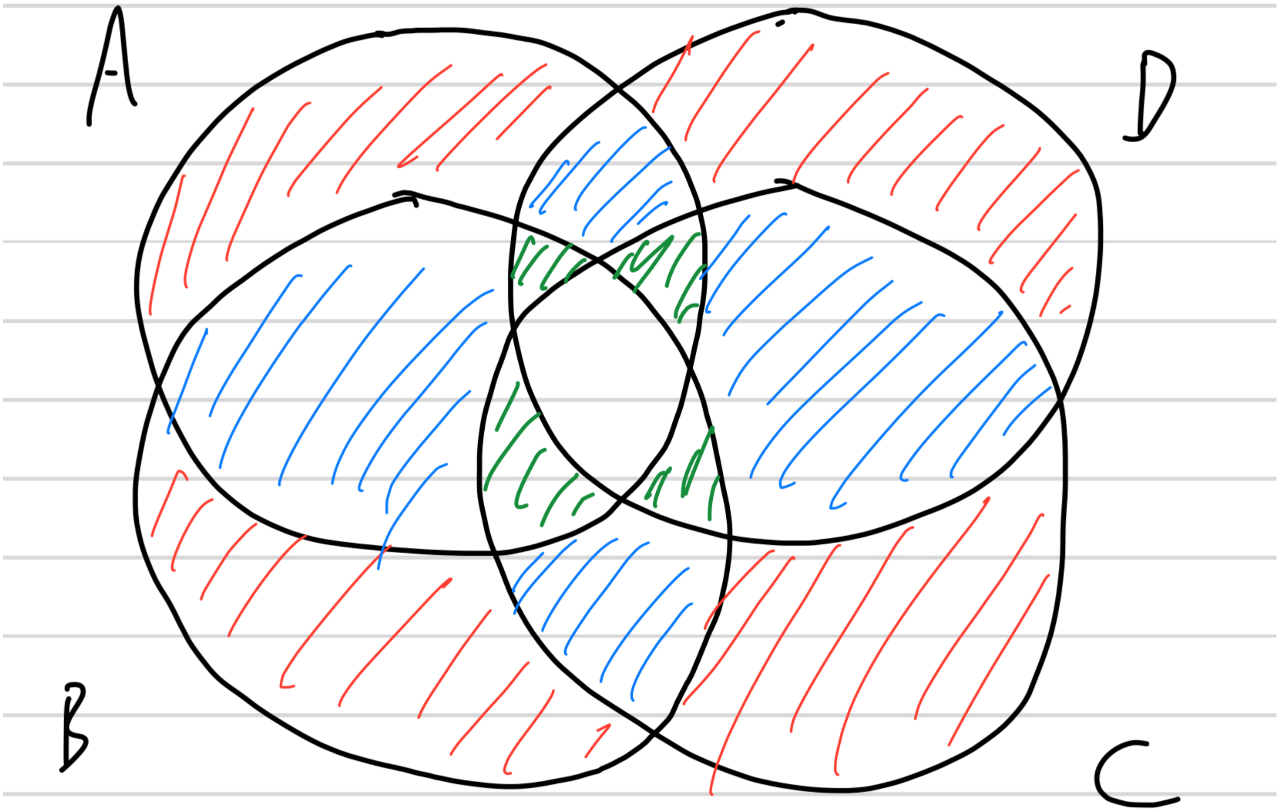
9.4. 集合的图形表示法

10. 对 24 名科技人员进行掌握外语情况的调查，其统计资料如下：会说英语、日语、德语、法语的人数分别是 13、5、10 和 9。其中同时会说英语、日语的人数为 2。同时会说英语、德语或同时会说英语、法语或同时会说德语、法语两种语言的人数均为 4。会说日语的人既不会说法语也不会说德语。则同时会说英语、德语、法语的人数为__1__。

$$\sum 1\text{个} - \sum 2\text{交} + \sum 3\text{交} - 4\text{交} = 4\text{并}$$

$$(37) - (14) + (x) = 24 \Rightarrow x = 1$$

9.4. 集合的图形表示法



9.5. 集合运算的性质和证明

( ) 2. $A\cup(B\cap C)$与___不恒等

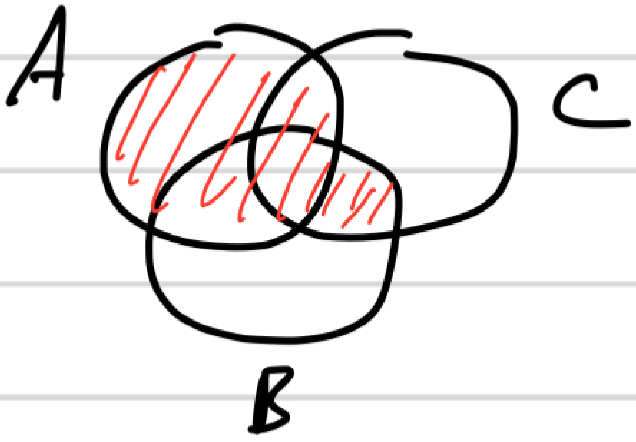
A. $(A\cup B)\cap(A\cup C)$

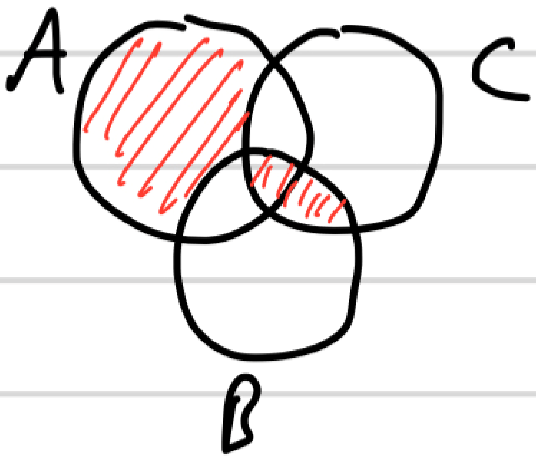
B. $((A-B)-C)\cup(B\cap C)$

C. $(A-B)\cup(B\cap C)\cup(A-C)$

D. $A\cup(B-(B\oplus C))$

B





9.5. 集合运算的性质和证明

书P142及145

( ) 3. 假设 $A \subseteq B$，以下___不一定成立

A. $\bigcup A \subseteq \bigcup B$

B. $\bigcap A \subseteq \bigcap B$

C. $P(A) \subseteq P(B)$

D. $A - B \subseteq B - A$

B

定理 9.5.11 对集合的集合 A 和 B，有

(1) $A \subseteq B \Rightarrow \bigcup A \subseteq \bigcup B$，

(2) $A \subseteq B \Rightarrow \bigcap B \subseteq \bigcap A$，其中 A 和 B 非空.

证明 (1) 设 $A \subseteq B$. 对任意的 x，可得

$$x \in \bigcup A \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \land y \in A)$$
$$\Rightarrow (\exists y)(x \in y \land y \in B) \Leftrightarrow x \in \bigcup B$$

所以，$\bigcup A \subseteq \bigcup B$.

(2) 设 $A \subseteq B$. 对任意的 x，可得

$$x \in \bigcap B \Leftrightarrow (\forall y)(y \in B \rightarrow x \in y)$$
$$\Rightarrow (\forall y)(y \in A \rightarrow x \in y) (由 A \subseteq B)$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcap A$$

所以，$\bigcap B \subseteq \bigcap A$.

9.6. 有限集合的基数

1. 对于有限集合 A、B，$P(P(A)\times B)$ 基数是 $2^{|B|*2^{|A|}}$ 。

$P(A)$基数是$2^{|A|}$

9.7. 集合论公理系统

三. (8') 证明： $A \times A \in P(P(P(A)))$.

9.7 证明：（根据定义证明）

$A \times A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \} = \{ \{\{x,y\}, \{x\}\} \mid x, y \in A \}$.

$\{x\} \in P(A)$, $\{x, y\} \in P(A)$

$\Rightarrow \{ \{x\}, \{x,y\} \} \subseteq P(A)$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle \subseteq P(A)$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in PP(A)$

$\Rightarrow A \times A \subseteq PP(A)$

$\Rightarrow A \times A \in PPP(A)$.

10.1. 二元关系

2. 设A是n个元素的集合，则A中的所有不同关系的总数是____ 2^{n^2}

$A\times A$有n^2种组合

每个组合有两种可能（xRy或$x\not R y$）

10.5. 关系的闭包

五. (8') 给定 $A=\{1,2,3,4\}$ 和 A 上的关系 $R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$，

求：R 的自反闭包、对称闭包及传递闭包的关系矩阵。

五. $A=\{1,2,3,4\}$

$R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$.

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$r(R)=R\cup R^0=R\cup I_A$

$$M(r(R))=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$s(R)=R\cup R^{-1}$

$$M(s(R))=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

R本身是传递的，$M(t(R))=M(R)$.

10.5. 关系的闭包

八、(10') 设 $A=\{a,b,c,d\}$ 中的关系 $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$，

(1) 用 $M(R)$ 的幂求 R^2,R^3；

(2) 求最小的自然数 $m,n\ (m<n)$，使得 $R^m=R^n$。

(3) 求出关系 R 的自反、对称且传递的闭包，请写出详细步骤。

八. (1) $A=\{a,b,c,d\}$.

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$R^2=\{<a,a>,<a,c>,<b,b>,<b,d>\}$.

10.5. 关系的闭包

$$M(R^3) = M(R^2 \circ R)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^3 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle\}.$$

(2) $$M(R^4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^2 = R^4 \Rightarrow m=2, n=4.$$

(3) 自反 $r(R) = R \cup I_A = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle\}.$

对称 $s(R) = R \cup R^{-1} = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle c,b\rangle, \langle d,c\rangle\}.$

传递 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cdots$

$$M(t(R)) = M(R \cup R^2 \cup R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$t(R) = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,d\rangle\}.$$

10.6. 等价关系和划分

3. $A=\{1,2,3,4\}$ 上的等价关系的个数为 15 。

书上P181

定理 10.6.1 R 是非空集合 A 上的等价关系，对任意的 $x,y\in A$，成立

(1) $[x]_R\neq\varnothing$ 且 $[x]_R\subseteq A$，

(2) 若 xRy， 则 $[x]_R=[y]_R$，

(3) 若 $x\not R y$， 则 $[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$，

(4) $\bigcup\{[x]_R \mid x\in A\}=A$.

10.6. 等价关系和划分

四. (8') 设 R 是 A 中的对称关系，且 $R^2 \subseteq R$，证明：$S = I_A \cup R$ 是 A 上的等价关系。

先证明自反性

$\langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in I_A \cup R \Rightarrow xSx$ 得证.

再证明对称性

$xSy \Leftrightarrow xRy \vee xI_Ay \Leftrightarrow yRx \vee yI_Ax \Leftrightarrow ySx$

最后是传递.

$(xSy) \wedge (ySz)$

$\Leftrightarrow (xI_Ay \vee xRy) \wedge (yI_Az \vee yRz)$

$\Leftrightarrow (xI_Ay \wedge yI_Az) \vee (xI_Ay \wedge yRz) \vee (xRy \wedge yI_Az) \vee (xRy \wedge yRz)$

$\Leftrightarrow (xI_Az) \vee (xRz) \vee (xRz) \vee (xR^2z)$

$\Rightarrow xSz.$

10.8. 偏序关系

( ) 6. 下面四个关系中______是拟序关系

A. R 中的 “>” 关系

B. $N-\{0\}$ 中的整除关系

C. $N-\{0\}$ 中的互素关系

D. $R=\{<x,y>|(x-y)$被5整除$,x,y\in Z\}$

A

书上P185

定义 10.8.2 对非空集合 A 上的关系 R，如果 R 是非自反的和传递的，则称 R 为 A 上的拟序关系.

定理 10.8.1 R 为 A 上的拟序关系，则 R 是反对称的.

10.6-8. 等价关系和划分、相容关系和覆盖、偏序关系

(　)7. 设 R 是 A 中的一个关系，$I_A \subseteq R$，若有 $<a,b>\in R \wedge <a,c>\in R \Rightarrow <b,c>\in R$，则下列说法最准确的是______

A. R 是等价关系

B. R 是相容关系

C. R 是偏序关系

D. R 是拟序关系

A

（自反+对称）+传递

10.6-8. 等价关系和划分、相容关系和覆盖、偏序关系

( ) 11. R_1, R_2 均为 A 中的关系，下面结论正确的是______。

A. 若 R_1, R_2 均为对称关系，则 $R_1 \circ R_2$ 为对称关系

B. 若 R_1 是偏序关系，则 R_1^{-1} 也是偏序关系

C. $t(R_1) \cup t(R_2) = t(R_1 \cup R_2)$

D. $st(R_1) = ts(R_1)$

B

r1 = {<1,2>,<2,1>}

r2 = {<2,3>,<3,2>}

r1or2 = {<1,3>}

定理 10.5.6 对非空集合 A 上的关系 R_1、R_2，则

(1) $r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$，

(2) $s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$，

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$.

定理 10.5.12 对非空集合 A 上的关系 R，有

(1) $rs(R) = sr(R)$，

(2) $rt(R) = tr(R)$，

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$.

其中 $rs(R) = r(s(R))$，其他类似.

书上P166及P174

10.6-8. 等价关系和划分、相容关系和覆盖、偏序关系

(　) 15. 设 R 是 A 中的对称关系，且 $R^2 \subseteq R$，则 $S = I_A \cup R$ 是 A 上_____。

A. 相容关系

B. 等价关系

C. 偏序关系

D. 拟序关系

B

对称+（自反+传递）

11.1. 函数和选择公理

4. A={a, b}, B={1, 2, 3}. 从 A 到 B 的满射函数有____0____个。

书上P195

如果 $f:A\to B$ 是满射的，则对任意的 $y\in B$，存在 $x\in A$，使 $f(x)=y$. 如果 $f:A\to B$ 是单射的，则对任意的 $y\in \mathrm{ran}(f)$，存在唯一的 $x\in A$，使 $f(x)=y$.

11.1. 函数和选择公理

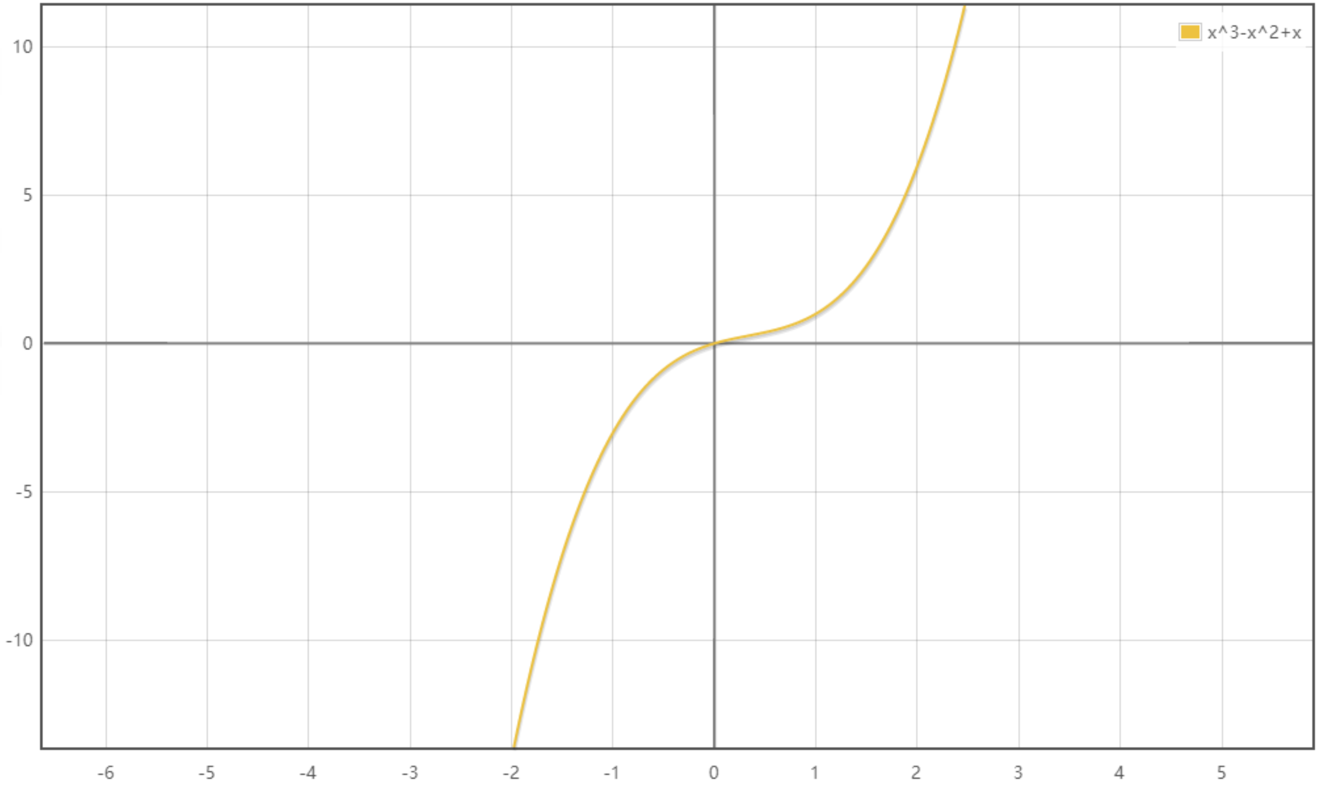
(　) 13.　函数 $f:R\to R, f(x)=x^3-x^2+x$ 是______。

A.　满射但是不单射的

B.　单射但是不满射的

C.　双射的

D.　既不是满射也不是单射的



C

11.2. 函数的合成与函数的逆

( ) 9. f, g是函数. 若 g 不是单射的, 则______

A. $f \circ g$ 不是单射的

B. $g \circ f$ 不是单射的

C. A, B 都不对

D. 不一定

A

书上P197

定理 11.2.1 设 $g: A \to B, f: B \to C$, 则

(1) $f \circ g$ 是函数 $f \circ g: A \to C$,

(2) 对任意的 $x \in A$, 有 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

11.2. 函数的合成与函数的逆

(　) 8. f 是集合 A 到集合 B 的关系，则______

A. 若 f 是函数，则 f^{-1} 也是函数

B. 若 f^{-1} 是函数，则 f 也是函数

C. 若 f 不是函数，则 f^{-1} 也不是函数

D. 都不对

D

多对一vs.一对多

11.2. 函数的合成与函数的逆

(　) 14. 函数$f: R \rightarrow R, f(x) = x+1$与$g: R \rightarrow R, g(y) = y-1$，则函数的合成$h = f \circ g$为______。

A. $h(x) = x$

B. $h(x) = x^2 - 1$

C. $h(x,y) = (x+1)(y-1)$

D. $h(x) = x^2 + x - 1$

A

$$h(x) = (x-1) + 1$$

11.2. 函数的合成与函数的逆

等于

8. 若函数$f: A \to B$是双射的，则 f 的左逆________右逆（等于，不等于）。

书上P200

定理 11.2.8 设 $f:A\to B, A\neq\varnothing$，则

(1) f 存在左逆，当且仅当 f 是单射的；

(2) f 存在右逆，当且仅当 f 是满射的；

(3) f 存在左逆又存在右逆，当且仅当 f 是双射的；

(4) 若 f 是双射的，则 f 的左逆等于右逆.

(4) 设 f 的左逆为 $g:B\to A$，右逆为 $h:B\to A$，则 $g\circ f=I_A, f\circ h=I_B$.

$$g = g\circ I_B = g\circ(f\circ h) = (g\circ f)\circ h = I_A\circ h = h$$

所以，$g=h$.

11.3. 函数的性质

五、(8') 设$f: A \to B, g: C \to D, f \subseteq g, C \subseteq A$，证明$f = g$

$\forall \langle x, y\rangle \in g$，有 $x \in C$，由 $C \subseteq A$，则 $x \in A$，

那么 $\exists y_0$，$f(x) = y_0$，即$\langle x, y_0 \rangle \in f$，

又由 $f \subseteq g$，则$\langle x, y_0 \rangle \in g$.

由函数定义易知 $y = y_0$，因此$\langle x, y\rangle \in f$

则 $g \subseteq f$，所以 $f = g$.